La confrontation de cadres théoriques dans l'analyse didactique de vidéos réalisées dans des classes

Michèle Artigue, Agnès Lenfant, Eric Roditi

LA CONFRONTATION DE CADRES THEORIQUES DANS L'ANALYSE DIDACTIQUE DE VIDEOS REALISEES DANS DES CLASSES

Michèle Artigue, Agnès Lenfant, Eric Roditi[1]

I. INTRODUCTION

Cet article s'appuie sur la recherche qui a été menée par le groupe didactique de l'IREM Paris 7 dans le cadre du projet ADIREM-INRP. L'intention de ce groupe était de questionner les potentialités respectives des cadres théoriques les plus utilisés dans les travaux français de didactique : dialectique outil-objet et jeux de cadres (Douady, 1986), théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), approche anthropologique (Chevallard, 1992, 1999), pour répondre aux questions à l'étude dans ce projet : Quand l'élève fait-il des mathématiques ? Comment les organisations mathématiques et didactiques mises en place dans l'enseignement influencent-elles le travail mathématique de l'élève ? En quoi le favorisent-elles ou, le cas échéant, le contrarient-elles ?

En effet, chaque cadre théorique organise un certain regard sur la « réalité » qu'il se propose d'étudier, et contraint de ce fait, tout en le rendant possible, le travail sur cette réalité. Il conditionne la façon dont la « réalité » va être questionnée et donc les connaissances qui vont pouvoir être développées sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il conditionne enfin, par voie de conséquence, les actions que l'on va pouvoir raisonnablement envisager, sur la base de ces connaissances, pour essayer d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage. Comprendre comment les cadres théoriques qui sont communément utilisés par les chercheurs façonnent le travail didactique, s'interroger sur la façon dont les différents points de vue qu'ils offrent sur une réalité complexe peuvent s'articuler et se compléter, est donc une question qui, même si elle peut sembler au départ purement théorique et intéressant uniquement une minorité de chercheurs, est fondamentale et nous concerne tous car elle est au cœur des rapports entre théorie et pratique. Elle est aussi cruciale en ce qui concerne les problèmes de formation. Faut-il, dans un premier contact avec le champ didactique, privilégier certaines entrées et, si oui, lesquelles et pour quelles raisons ? Faut-il au contraire chercher à privilégier la recherche d'une cohérence croisant différents regards ? Comment les choix effectués à ce niveau sont-ils susceptibles d'affecter les représentations des formés et leur action didactique ?

Dans son travail, le groupe didactique de l'IREM Paris 7 a fait l'hypothèse qu'il existait nécessairement des points aveugles ou quasi-aveugles à chaque approche théorique, mais qu'il existait aussi des possibilités de traductions ou conversions partielles et locales, imparfaites bien sûr, mais suffisantes pour organiser une communication productive et faire jouer de façon efficace les complémentarités. Et c'est cette communication entre cadres théoriques qu'il a essayé de mettre en œuvre et d'exploiter pour étudier l'activité mathématique des élèves et ce qui la détermine, conformément aux objectifs du projet ADIREM-INRP.

[1] Le travail de recherche sur lequel s'appuie cet article a été mené au sein du groupe didactique de l'IREM Paris 7. Michèle Artigue, Teresa Assude, Jacqueline Belloc, Régine Douady, Mariam Haspekian, Agnès Lenfant, Michèle Mathiaud et Eric Roditi y ont participé.

Dans cet article, après avoir précisé les principaux choix effectués, nous voudrions rendre compte de la réflexion menée et de ses résultats, sous une forme synthétique et accessible à d'autres que des chercheurs en didactique. Nous nous sommes pour cela appuyés sur les transpositions que nous avons déjà effectuées de ce travail en formation. Cette recherche a, en effet, déjà été exploitée en formation dans deux contextes différents : la formation des doctorants en didactique des mathématiques de l'université Paris 7 d'une part, une formation de formateurs d'autre part[2] , en 2001-2002. Elle est de plus, cette année, réinvestie dans une formation d'analyse des pratiques proposée par l'IREM Paris 7 et inscrite au PAF de l'académie de Créteil. Ces transpositions nous ont conduits à compléter cet article par un glossaire qui précise, en termes simples, les principales notions didactiques utilisées.

II. LES PRINCIPAUX CHOIX EFFECTUÉS

Nous avons choisi de nous appuyer, pour mener cette recherche, sur des enregistrements vidéos de séances de classes, déjà réalisés. Il s'agissait au départ de séances filmées dans les classes d'animateurs IREM, tous enseignants chevronnés. Nous avons ainsi commencé à travailler sur deux vidéos réalisées à l'IREM Paris 7 sur le même thème mais dans deux classes différentes. Le thème était celui du signe des fonctions polynômes et le travail mené avec les élèves (niveau seconde) visait en particulier à faire apparaître le tableau de signes comme un moyen efficace et économique de condenser l'information sur ce signe. Ces vidéos concernaient des séances d'enseignement associées à une expérimentation pilotée par R. Douady et élaborées dans un cadre théorique précis : celui de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres. Il était donc particulièrement intéressant de confronter les analyses qui avaient présidé à la conception des séances à celles offertes par d'autres cadres théoriques. Un partage du travail s'est effectué entre l'IREM Paris 7 et l'IREM de Poitiers avec lequel nous collaborions sur ce projet. L'IREM de Poitiers s'est centré sur l'étude des potentialités de l'approche anthropologique[3], tandis que nous étudions celles de la théorie des situations didactiques, d'abord de façon classique, ensuite en faisant intervenir certains raffinements introduits par la structuration du milieu (Margolinas , 1998).

Dans l'une des deux classes filmées, les prévisions initiales des concepteurs s'étaient trouvées perturbées par l'utilisation, écartée *a priori*, des calculatrices. Il nous a semblé que les recherches sur l'intégration des technologies informatiques développées ces dernières années par Artigue, Lagrange, Guin et Trouche, dans le cadre de calculatrices symboliques (Guin & Trouche, 2002), pouvaient ici se révéler utiles, par les outils qu'elles avaient contribué à construire pour étudier les processus d'instrumentation de ces technologies, dans leurs dimensions personnelle et institutionnelle. Ceci nous a conduits à intégrer un nouveau cadre : celui de l'instrumentation à l'analyse.

Les vidéos avaient été réalisées dans les classes d'enseignants chevronnés sur la base d'un scénario qui ne correspondait à une séance de classe ordinaire, ni dans son organisation mathématique, ni dans son organisation didactique : une première phase de travail en groupes d'une heure y précédait un synthèse collective ayant approximativement la même durée. C'est pourquoi, dans un second temps de cette recherche, il nous a semblé important, d'intégrer à l'analyse un corpus tout à fait différent : celui correspondant à une vidéo réalisée au même niveau (seconde) mais cette fois-ci dans la classe d'un enseignant débutant. Ceci a été possible grâce au travail de thèse d'A. Lenfant à l'IUFM de Reims sur l'évolution du rapport à l'algèbre chez les professeurs stagiaires de mathématiques (Lenfant, 2002). En effet, dans le cadre de cette thèse, A. Lenfant a effectué le suivi sur une année d'un certain nombre de professeurs stagiaires volontaires et elle a réalisé plusieurs films vidéos. Chaque réalisation a été précédée d'un entretien préliminaire et suivie d'un entretien

[2] Pour une description de ces formations nous renvoyons au rapport présenté par l'équipe dans (Noirfalise, 2003).
[3] Dans cet article, nous n'aborderons pas ce volet de l'analyse pour lequel nous renvoyons à la contribution de l'IREM de Poitiers.

à chaud. La séance a chaque fois fait l'objet d'une préparation écrite de la part du professeur stagiaire. L'ensemble constituait donc pour nous un matériel particulièrement intéressant pour mettre à l'épreuve les résultats des analyses menées dans la première phase de la recherche. En fait, une seule vidéo a été analysée, correspondant à la rencontre avec la notion de fonction en seconde, à partir d'un problème de variation posé dans un contexte géométrique. Cette séance ne relevait pas, comme l'on pouvait s'y attendre, de la même organisation didactique que la séance précédemment étudiée. Pour comprendre cette organisation, sa cohérence, pour comprendre le travail mathématique des élèves dans ses relations avec le travail de l'enseignant, nous avons éprouvé le besoin, encore une fois, de sortir des cadres initiaux d'analyse. Nous avons cette fois convoqué la double approche ergonomique et didactique[4] développée par A. Robert pour l'étude des pratiques enseignantes (Robert, 2001), (Roditi, 2001).

Deux séances seulement. Ceci peut paraître un travail très limité. Pourtant il nous a permis, nous semble-t-il, de mieux percevoir les potentialités respectives de chacun des cadres, les complémentarités des analyses que chacun conduisait à mener, et de mettre ces potentialités et complémentarités au service de l'analyse des processus complexes que nous avons l'ambition de comprendre et d'influencer. Dans la suite de cet article, nous essaierons de faire partager cette conviction au lecteur. Suivant le déroulement chronologique de la recherche, nous présenterons d'abord l'analyse des premières vidéos associées à la situation du signe d'un polynôme. Pour plus de détail, le lecteur pourra se rapporter au rapport intermédiaire (.Artigue & al., 2001).

III. LA SITUATION DU SIGNE D'UN POLYNÔME

III.1 Présentation

Cette situation est la première d'une ingénierie élaborée par R. Douady, en collaboration avec deux animatrices de l'IREM : J. Belloc et M. Mathiaud, pour la classe de seconde, avec pour objectifs, comme précisé par R. Douady dans le rapport intermédiaire cité ci-dessus :

- « *d'étudier les relations existantes entre le signe d'un polynôme P(x) selon les valeurs de x d'une part et le nombre, les valeurs et multiplicités des racines réelles de ce polynôme d'autre part,*
- *d'établir le tableau de signes comme un moyen efficace de condenser l'information sur le signe de P et la rendre disponible rapidement voire d'un seul coup d'œil, à un utilisateur.* »

Ce projet particulier s'inscrivait dans une recherche plus vaste concernant l'apprentissage des fonctions polynômes en seconde avec, en vue, de préparer l'enseignement futur de l'analyse. Une hypothèse didactique faite était que :

> « *pour faciliter la maîtrise algébrique des fonctions polynômes, les élèves ont besoin de les concevoir à la fois d'un point de vue topologique et d'un point de vue algébrique, en dépit du fait que l'approche topologique ne soit pas nécessaire à l'étude algébrique*. »

Pour ce faire, R. Douady a construit une ingénierie s'appuyant sur des jeux de cadres algébrique-graphique-fonctions, le cadre graphique[5] lui paraissant particulièrement adapté pour introduire l'approche topologique souhaitée. La situation filmée, la première de cette ingénierie, comme nous le verrons, ne met néanmoins pas en jeu explicitement le graphique. Différentes expressions polynomiales factorisées sont proposées aux élèves travaillant en groupes et, chaque groupe, pour son expression, doit répondre aux mêmes questions. Le travail est prévu en deux étapes :

[4] Le sens de ce terme est précisé dans le glossaire.

[5] Nous reprenons ici les termes de R. Douady, mais le terme graphique renvoie ici plutôt à un registre de représentation sémiotique, qu'à un cadre, comme on le verra dans la suite.

Etape 1 : exemple

Pour des valeurs numériques données de x, vous devez calculer les valeurs numériques de l'expression suivante : $$f(x) = (x-2)(2x-3)(x+5)(4x+1)(1-x)$$ Sont-elles toujours positives ? Sont-elles toujours négatives ? Sont-elles quelquefois positives, quelquefois négatives ? Calculez ! Quand vous avez une réponse, appelez votre professeur.

Etape 2 :

Trouvez un moyen qui vous permette de dire, très vite et de façon fiable, quand votre professeur vous propose une valeur numérique pour x, si l'expression est positive, négative ou nulle. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Quand vous pensez avoir une méthode, appelez votre professeur.

Pour choisir les expressions, on a joué sur un certain nombre de variables : le nombre de facteurs (de 3 à 5), le caractère simple ou double des racines, la valeur des racines (signe, valeur entière, rationnelle ou irrationnelle), la présence ou non de facteurs du second degré et, pour ces derniers, l'existence de racines réelles ou non[6]. Ces choix doivent permettre, entre autres, de distinguer entre nombre de facteurs et nombre de racines distinctes. En revanche, tous les nombres intervenant sont des entiers petits, ceci pour rendre d'un coût raisonnable, dans cet environnement hors calculatrice, les calculs numériques nécessaires.

La première étape a pour but de faire constater que, pour les expressions considérées, le signe n'est pas constant, et donc donner sens à la deuxième étape. La deuxième étape vise à faire apparaître, comme indiqué ci-dessus, le tableau de signes comme un moyen efficace de résoudre la tâche proposée : trouver une méthode permettant de dire très vite, pour un nombre donné le signe de l'expression.

III.2. Une première analyse

Nous allons, dans cette première analyse utiliser des outils fournis par le cadre de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres[7], que nous noterons dans la suite pour abréger DOO qui a servi de base à la construction de la situation.

Ce cadre nous incite à nous interroger *a priori* sur les stratégies qu'un élève de ce niveau peut développer pour résoudre le problème qui lui est posé, à nous interroger sur l'efficacité respective de ces stratégies et à nous demander si, comme visé, le tableau de signes peut apparaître, spontanément, comme « outil implicite » pour condenser l'information obtenue, au fil du travail, sur le signe des expressions manipulées. La DOO, de plus, nous incite à organiser l'étude de ces stratégies en distinguant les cadres mathématiques dans lesquels elles se situent.

Nous nous limiterons ici à la deuxième étape de l'activité, la seule devant être *a priori* problématique pour les élèves. Signalons toutefois que la première étape de l'activité se situe dans un cadre numérique : des valeurs sont choisies et, par substitution, on calcule la valeur de l'expression. On développe ce faisant un point de vue ponctuel sur l'expression perçue à travers sa valeur en des points particuliers. L'obtention d'une méthode, dans la phase 2, suppose un changement de point de vue. Il faut dépasser en effet cette vision

[6] Les expressions sont les suivantes : x(7-3x)(5x-3), (4x+1)(3x-6)(7-3x), x(2x-3)(1-x)(x+2), (x+2)(3-x)(4x+1)(8x-12), (x-2)(2x-3)(x+5)(4x+1)(1-x), (2x+1)(x^2-2)(x+10), (x+1)(x^2+1)(x^2-9), (x+2)(x-2)(3x+1)(4x-8), x(14-6x)(7x-16)(x+7)(3x-7)

[7] Le sens de ces termes est précisé dans le glossaire.

ponctuelle pour développer une vision en termes d'intervalles, puisque c'est le fait que le signe soit constant par intervalles qui permet de résoudre le problème posé.

Pour cette deuxième étape, trois cadres de résolution peuvent être envisagés à ce niveau : un cadre numérique, un cadre algébrique et un cadre fonctionnel. Précisons les stratégies *a priori* envisageables dans chaque cadre.

Au cadre numérique, celui des nombres, est associée une stratégie de résolution ponctuelle, consistant à déterminer le signe pour différentes valeurs numériques et à essayer de repérer des régularités. On peut penser que, même si les choix sont peu organisés au départ, la stratégie va évoluer dans le temps imparti vers un balayage organisé. Elle est en continuité avec le travail demandé dans la première étape mais elle ne permet pas nous semble-t-il, de résoudre le problème posé à l'étape 2, vu les choix faits pour les expressions : tous les polynômes ont en effet des racines non entières. Or on peut penser que les élèves travaillant dans ce cadre privilégieront un balayage par des valeurs entières.

Au cadre algébrique, celui des équations et inéquations, peut être associée une stratégie de résolution consistant à déterminer le signe de chacun des facteurs de l'expression puis à utiliser la règle des signes pour conclure. C'est cette stratégie qui est sous-jacente au tableau de signes. Il n'y a cependant pas lieu de penser que, même si les élèves adoptent cette stratégie, ils construiront un tableau de signes. Il est plus vraisemblable qu'ils utiliseront des représentations avec lesquelles les a familiarisées la fréquentation des inéquations, par exemple des représentations graphiques sur une droite, superposées (une par inéquation), avec éventuellement une représentation finale synthétisant les résultats. Une variante de cette stratégie nous semble aussi à considérer : celle consistant à rechercher seulement les valeurs qui annulent l'expression, en considérant que pour changer de signe l'expression doit nécessairement s'annuler[8]. On peut penser que, si des élèves adoptent cette stratégie, ils peuvent aussi penser que dès que l'expression s'annule, elle change de signe. La grande majorité des polynômes proposés n'ayant que des racines simples, ce théorème en acte ne sera pas nécessairement mis en défaut dans le travail de groupe, mais pourra l'être dans le bilan collectif. Cette variante n'a pas de raison de déboucher sur un tableau de signes mais plutôt sur une représentation de la droite réelle où seraient marquées les racines du polynôme et où le signe de l'expression sur chaque intervalle correspondant serait précisé[9].

Au cadre fonctionnel, celui des fonctions, peuvent être associées plusieurs stratégies qui mobilisent, quant à elles, le registre graphique : représentation graphique des droites associées à chaque facteur et interprétation d'une part, construction d'une représentation graphique globale point par point, d'autre part. On peut raisonnablement penser que la première stratégie pourrait apparaître car les élèves, au collège, ont développé des techniques graphiques de résolution de systèmes d'inéquations linéaires. Mais elle devrait être difficile à mener au bout car les expressions ont beaucoup de facteurs, ce qui rend la lecture graphique très complexe (cf. figure 1). En revanche, il est prévu que ce soit l'objet d'un travail systématique dans la seconde séance de l'ingénierie, en se limitant à deux facteurs. La seconde stratégie semble, elle, plus improbable, les classes filmées n'ayant que peu d'expérience de travail avec les fonctions. La complexité des expressions rend d'autre part les représentations graphiques que pourraient tracer les élèves, point par point, très incertaines et peu susceptibles de fournir une méthode valide.

---

[8] Il y a là une mise en œuvre qui peut rester implicite du théorème des valeurs intermédiaires.

[9] L'étude historique menée par l'IREM de Poitiers montre que cette technique a été effectivement enseignée et se retrouve dans certains manuels.

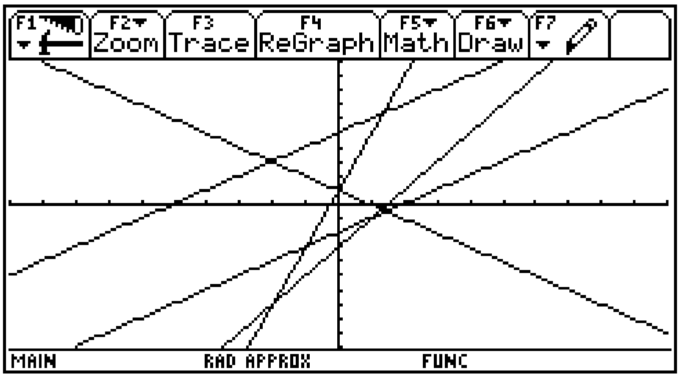

Figure 1 : Droites associées à l'expression donnée en III.1

Selon cette analyse *a priori*, c'est une résolution algébrique qui devrait donc s'imposer comme source de stratégie gagnante, et soutenir la transition nécessaire de la vision ponctuelle initiale à une vision globale. Le tableau de signes pourrait alors être introduit par l'enseignant comme un moyen de représentation schématique commode résumant à la fois les étapes de la procédure algébrique et son résultat[10]. Mais on ne peut assurer que tous les groupes d'élèves quitteront spontanément le cadre numérique dans lequel est formulé le problème et qui a été mobilisé dans la première étape, et le point de vue ponctuel associé, pour passer au cadre algébrique et à un point de vue global. De nombreuses recherches didactiques montrent en effet que les changements de cadres spontanés ne sont pas si fréquents chez les élèves. Il supposent une flexibilité cognitive dont l'enseignement en général ne prend pas le développement en charge. Lorsque des changements de cadre sont nécessaires à la résolution d'un problème, ils sont généralement sous la responsabilité de l'enseignant et introduits par exemple dans l'énoncé, non sous la responsabilité de l'élève.

Le cadre théorique de la DOO nous conduit aussi à nous demander quelles connaissances peuvent être construites dans l'interaction avec ce problème. La première phase devrait conduire sans difficultés les élèves à constater que les expressions données ne sont pas de signe constant. Ceci ne devrait pas les étonner car c'est cohérent avec les connaissances construites sur les fonctions affines. Cette fois cependant, les expressions changent plusieurs fois de signe. On peut aussi espérer que se construise pendant le travail de recherche la conviction que, sur certains intervalles, l'expression a un signe constant. Des connaissances plus élaborées peuvent apparaître, notamment si les élèves passent aux cadres algébrique ou fonctionnel, permettant de relier les bornes de ces intervalles aux valeurs qui annulent l'expression et/ou le signe de l'expression au signe de chacun de ses facteurs. Mais, comme nous l'avons déjà souligné, ceci n'est cependant pas certain.

Qu'une résolution algébrique s'impose peu comme stratégie optimale est compréhensible si l'on pense au rapport des élèves de seconde à l'algèbre et aux inéquations. Dans le travail en algèbre, les élèves en début de seconde, ont plutôt l'habitude d'être des exécutants, non des auteurs. Or ce qui est demandé là est du travail d'auteur.

III.3 La réalisation effective

Nous allons donner ci-après quelques éléments sur la réalisation effective, en nous appuyant en particulier sur la vidéo réalisée dans la première classe, travaillant sans calculatrice, conformément à la consigne. Le premier point à souligner est que les trois cadres de résolution vont effectivement apparaître, comme le montrent les présentations faites pendant le bilan collectif.

10 Même si, comme nous l'avons souligné, le tableau de signes en tant que tel n'a pas de raison d'apparaître spontanément comme réponse au problème posé, il peut néanmoins être introduit par des élèves redoublants qui sauraient faire le lien entre le problème posé et leur expérience antérieure.

Le premier groupe à passer au tableau a travaillé sur l'expression x(2x-3)(1-x)(x+1), en restant toujours dans un cadre numérique. Ceci lui a permis d'aboutir à une conjecture très partielle : pour x>1,5, l'expression est négative. Un lien a été fait avec le fait que 1,5 annule le facteur 2x-3 mais ceci n'a pas débouché sur une recherche systématique des valeurs annulant les autres facteurs, donc à un basculement vers le cadre algébrique. On a finalement, pour ce groupe, un travail mathématique pauvre si l'on considère le temps qui lui a été imparti.

Le second groupe a, lui, travaillé sur l'expression x(7-3x)(5x-3) et il a trouvé une méthode en passant au cadre algébrique. Sa stratégie est du type de la seconde que nous avons envisagée, basée sur la résolution des équations. Il en présente brutalement les résultats d'abord sous la forme suivante :

$x<0 \to +$	$x=0 \to 0$
$3/5>x>0 \to -$	$x=3/5 \to 0$
$3/5<x<7/3 \to +$	$x=7/3 \to 0$….

puis dans le registre graphique, en positionnant les valeurs trouvées sur la droite réelle, et en précisant les signes correspondants. Les réponses aux questions posées par l'enseignant montrent que si les élèves ont bien repéré la constance du signe sur les intervalles délimités par les zéros, ceci s'est effectué de façon très pragmatique, en prenant plusieurs valeurs pour vérifier. Ils n'ont pas raisonné algébriquement sur le signe des différents facteurs. En revanche, ils semblent bien convaincus que leur méthode est efficace et peut être généralisée à une expression comportant un nombre quelconque de facteurs.

Le troisième groupe a, lui, travaillé sur l'expression (4x+1)(3x-6)(7-3x) et est passé, lui, au cadre fonctionnel, en utilisant la stratégie que nous avons qualifiée de globale. Ils ont d'abord pris des nombres au hasard et se sont retrouvés avec trois points au-dessus de l'axe des abscisses et un au-dessous qu'ils ont joints par une ligne courbe régulière traversant une fois l'axe des x. Ceci a attiré leur attention sur les zéros de la fonction qu'ils ont alors obtenu en résolvant les équations associées au trois facteurs. En fait, le tracé obtenu n'est pas correct : il y a un zéro en –2 (au lieu de 2), dû sans doute à une erreur dans la résolution de l'équation, et un en 2,3 (correspondant à 7/3) ; la courbe est tangente à l'axe des x en ce point, sans doute parce que n'ayant pas pris de nombres entre 2 et 7/3, toutes les valeurs calculées pour x>-1/4 sont négatives. Leur travail s'est arrêté là sans qu'une conclusion claire en soit tirée pour la résolution du problème posé. Lors du bilan collectif, les autres élèves semblent peu attirés par cette méthode, mais ceci semble autant dû au statut du registre graphique en général qu'à la faible fiabilité du travail du groupe dans le cas présent.

Le quatrième groupe à présenter son travail avait à traiter l'expression : (x+2)(3-x) (4x+1)(8x-12). Ils fournissent un tableau de trois lignes, en indiquant sur chaque ligne, des valeurs ordonnées pour lesquelles l'expression est nulle (ligne 1), positive (ligne 2), négative (ligne 3). Mais en fait, leur travail s'est déroulé dans le cadre algébrique : ils ont résolu les équations, puis les inéquations associées à chaque facteur puis, passant au registre graphique, ils ont voulu représenter leurs résultats en traçant les quatre droites et en coloriant… là ils ne savaient pas trop quoi et ils se sont retrouvés bloqués.

Le cinquième et dernier groupe à présenter son travail avait l'expression x(14-6x)(7x-16)(x+7)(3x-7). Ce groupe, qui comporte des redoublants, a fait un tableau de signes, ayant au bout d'une demi-heure fait la connexion avec « un truc fait l'année dernière » comme il l'exprime. Ils ont bien repéré que deux des facteurs avaient le même zéro, ont alors factorisé et mis sous forme d'un carré dont ils ne se sont plus occupés car il était toujours positif. D'où un tableau réduit. En fait, faisant une erreur classique, ils ont oublié la ligne correspondant au facteur x et leur tableau est incorrect. Précisons qu'un autre groupe, comportant lui aussi des redoublants, a également fait un tableau de signes.

Comme on le voit, ces données issues de la réalisation effective, montrent bien la pertinence de l'analyse *a priori* que nous avons menée avec les outils de la DOO et l'efficacité de ces outils pour anticiper ce que peut être le travail mathématique autonome de groupes d'élèves de ce niveau confrontés à ce problème. Ce travail mathématique peut être, suivant les relations que les élèves vont nouer avec le problème, suivant les cadres et registres qu'ils vont privilégier, d'une qualité mathématique très variable et l'on retire de cette confrontation de la théorie à la contingence, que si l'on souhaite optimiser le travail mathématique des élèves, dans une situation de classe plus ordinaire, non dans une situation expérimentale comme c'est le cas ici, l'enseignant va avoir un rôle à jouer, y compris dans la phase de recherche, pour éviter que les élèves ne restent piégés dans le cadre numérique initial. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement mais pour l'instant, nous voudrions aborder la question de l'articulation de l'approche développée jusqu'ici avec la théorie des situations didactiques.

III.4 L'articulation avec la théorie des situations didactiques

Articuler les deux cadres théoriques sur cette situation ne nous a pas posé de problème. L'analyse va s'exprimer dans un langage différent mais le même questionnement est fondamentalement à l'œuvre. Dans le cadre de la DOO, on a questionné la situation dans sa capacité à susciter, dans un travail autonome des élèves, le passage d'une stratégie ponctuelle numérique à une stratégie globale algébrique ou fonctionnelle qui débouchera ensuite sur le tableau de signes, en faisant de ce tableau une réponse adaptée et économique au problème de la détermination du signe d'une expression polynomiale. Dans la théorie des situations didactiques, que nous désignerons dans la suite par TDS, on va questionner la situation sur sa capacité à faire apparaître la technique mathématique sous-jacente au tableau de signes comme réponse optimale au problème posé, dans un fonctionnement a-didactique[11].

La situation comporte deux sous-situations. La première a, de façon évidente, dans le langage de la TDS, une fonction de dévolution[12]. Il s'agit de constituer la détermination du signe d'une expression polynomiale en problème mathématique pour l'élève. Elle peut aussi servir à s'assurer que les connaissances minimales nécessaires à une interaction productive avec le milieu[13] (capacité à substituer des nombres aux lettres dans une expression algébrique, à conduire un calcul simple dans Z, voire dans Q) sont bien disponibles. Les deux analyses sont donc ici encore très proches.

Centrons-nous maintenant sur l'étape 2. Les élèves disposent pour s'attaquer au problème d'une stratégie de base au sens de la TDS : la stratégie ponctuelle, que l'étape 1 a justement mobilisée. Mais, comme déjà mentionné, elle ne permet pas d'aboutir pour les expressions concernées qui comportent au moins quatre alternances de signe et, toutes sauf une, des zéros non entiers. Elle peut néanmoins conduire à des conjectures partielles ou à des conjectures complètes erronées. Dans ce cas, le rôle joué par l'enseignant au niveau des interactions avec le milieu, sur lequel nous reviendrons dans la suite (c'est lui qui choisit les valeurs tests) doit permettre une déstabilisation. On se trouve donc dans le cas classique où la stratégie de base doit être dépassée. L'interaction avec le milieu le permet-elle ? C'est la question fondamentale qui se pose dans le cadre de la TDS.

L'analyse que l'on va mener dans le cadre de la TDS pour répondre à cette question se superpose à celle que nous avons déjà menée à un premier niveau tout au moins : identification des stratégies possibles, de leur coût et de leur efficacité compte-tenu du contexte, inférences sur les dynamiques prévisibles de la situation, dans le cadre d'un fonctionnement a-didactique, comme celui prévu. Et l'on arrive aux mêmes conclusions.

Si l'on se situe dans le cadre de la TDS, cette analyse engagerait alors, classiquement, à étudier la possibilité de construire à la suite de cette première situation, une situation dont l'enjeu serait non pas de trouver une méthode qui marche pour un cas particulier mais de valider cette méthode, de montrer que l'on ne peut lui opposer de contre-exemple. C'est

---

[11] Le sens de ce terme est précisé dans le glossaire.
[12] Idem
[13] Idem

d'ailleurs le cas dans l'ingénierie construite. La situation suivante, en effet, a pour enjeu selon R. Douady « l'étude des conditions de validité de la conjecture : chaque fois que f s'annule, elle change de signe ». Pour ce faire, elle va mettre au premier plan l'analyse en termes de facteurs mais elle le fait, non pas en construisant une situation de validation associée à la situation précédente, comme on aurait pu imaginer de le faire dans le cadre de la TDS, mais en utilisant un levier privilégié dans la DOO : celui des changements de cadres (et ici de registre). Il va s'agir en effet de relier dans le cadre fonctionnel et le registre graphique, le tracé de la courbe associée au produit h(x) de deux facteurs du premier degré à celui des droites D1 et D2 associées à ces facteurs, pour ensuite répondre aux questions suivantes :

1. On voudrait connaître le signe de h(x) pour n'importe quelle valeur de x. Comment faire ?
2. Garder la droite D1 et modifier la droite D2 pour que h(x) soit toujours positive ou nulle.

En conclusion de ce paragraphe, nous voudrions souligner que les deux analyses que nous avons menées jusqu'ici, dans le cadre de la DOO et de la TDS, sont tout à fait efficaces pour analyser le travail potentiel des élèves dans la phase de recherche, et les connaissances dont ce travail peut permettre l'apprentissage. La conception de la situation dans un cadre théorique précis, l'organisation didactique du travail de l'élève portée par cette conception, contribuent sans doute à l'opérationalité de ces analyses. Mais, tout en reconnaissant cette opérationalité et cette pertinence, nous voudrions dès maintenant aborder une autre question : celle du rôle de l'enseignant. Dans l'analyse effectuée par R. Douady, le problème mathématique est soigneusement analysé mais le rôle de l'enseignant n'est abordé que de façon très allusive, comme si l'organisation didactique proposée, conjuguant recherche autonome en petits groupes et synthèse collective, relevait d'une certaine routine pour les enseignantes considérées. L'analyse dans le cadre de la TDS que nous venons de résumer, centrée sur l'étude des potentialités a-didactiques de la situation, présente les mêmes caractéristiques. Or l'enseignant joue dans cette situation un rôle crucial, que ce soit dans la phase de recherche comme dans le bilan collectif. Et la vidéo de la seconde classe montre bien que ce qui a été considéré comme transparent et non problématique jusqu'ici : le travail de l'enseignant, ne l'est en rien. C'est pourquoi, dans un second temps, nous nous sommes interrogés sur la façon dont les cadres théoriques envisagés jusqu'ici nous conduisait à approcher l'enseignant et son travail. Ceci nous a conduits notamment à faire intervenir les structurations ascendantes et descendantes du milieu (Margolinas, 1998).

III.5 L'analyse du travail de l'enseignant

Nous avons jusqu'ici mené une analyse centrée sur l'activité mathématique des élèves dans la phase de recherche. L'analyse du travail de l'enseignant va nous amener à revenir sur cette phase pour analyser cette fois l'activité de l'enseignant et ses effets potentiels, puis à considérer la phase de bilan où il devient l'acteur central de la situation didactique. Nous distinguerons clairement ces deux phases dans ce qui suit. Soulignons que, pour ce qui est de la phase de recherche, notre analyse restera essentiellement une analyse *a priori* car nous disposons de peu d'information sur l'activité précise des enseignantes pendant cette phase. Pour la phase collective, il s'agira au contraire essentiellement d'une analyse *a posteriori*, utilisant les données de la vidéo réalisée dans la première classe. Comme annoncé plus haut, nous ferons intervenir dans cette analyse la structuration du milieu. Il s'agit là de développements de la TDS plus récents que ceux que nous avons utilisés jusqu'ici et sans doute moins familiers à de nombreux lecteurs. C'est pourquoi nous avons choisi de présenter cette structuration dans un premier paragraphe. Le lecteur souhaitant approfondir ces questions peut se référer aux actes de la dernière école d'été de didactique (Dorier & al., 2002).

<u>La structuration du milieu</u>

Nous avons jusqu'ici considéré le milieu comme une entité globale. Ses caractéristiques conditionnent les relations que les élèves vont pouvoir nouer avec le savoir mathématique en jeu dans la situation, leurs actions possibles et les rétroactions qu'ils vont recevoir suite à ces actions. Ces actions et rétroactions conditionnent les processus d'adaptation porteurs de construction de connaissances que les élèves vont développer. Le milieu, pour un élève donné, contient des objets matériels ou symboliques (l'expression que le groupe a à gérer est ainsi un élément du milieu) mais aussi les autres acteurs interagissant avec lui, notamment ici les élèves de son groupe. L'interaction que l'élève va développer avec le milieu dépend bien sûr aussi des connaissances mathématiques qui sont chez lui disponibles et qu'il va pouvoir actualiser dans la résolution de la tâche. En fait, ces connaissances peuvent être très variables d'un élève à l'autre mais, dans l'analyse *a priori*, on travaille en général avec un élève considéré comme générique, en faisant des hypothèses sur ces connaissances. Dans la situation présente, on supposera par exemple que l'élève générique sait ordonner des nombres décimaux et rationnels simples, calculer dans Z avec des nombres simples, résoudre des équations et inéquations du premier degré à coefficients entiers.

La structuration du milieu conduit à inclure cette entité globale dans une suite de structures emboîtées, chacune servant de milieu à la suivante. La première est la situation dite objective (notée S-3). Y intervient un milieu qualifié de matériel M-3 qui contient l'expression à traiter, les résultats obtenus dans la première étape et l'information donc que l'expression n'est pas de signe constant. C'est avec cette situation que va interagir l'élève (E-2) dans la situation dite de référence (S-2) pour chercher à répondre au problème posé : trouver une méthode. Le milieu de S-2, dit milieu objectif va ainsi s'enrichir de nouveaux couples (x,E(x)) ainsi que d'objets et représentations diverses aidant à organiser les résultats obtenus (objets et représentations variables suivant les cadres intervenant dans la résolution). Cette situation est à son tour incluse dans une situation S-1 qualifiée de situation d'apprentissage dont le milieu dit milieu de référence contient les résultats de l'action menée au niveau S-2. L'élève E-1 y est modélisé en position réflexive, émettant des conjectures et cherchant à les valider. Enfin, au niveau S0 se trouve la situation didactique, englobant tout ce qui précède, situation où les connaissances élaborées dans le groupe vont prendre un statut public et être reliées, avec l'aide de l'enseignant, aux savoirs visés par la situation. Dans le cas qui nous concerne, S0 est clairement identifiable à la phase de bilan collectif, tandis que dans la phase de recherche se joue un jeu dialectique entre les situations S-2 et S-1. En fait, pour prendre en compte la diversité des interactions possibles avec le milieu suivant les cadres choisis pour la résolution, nous avons construit trois structurations *a priori* associées respectivement à une résolution numérique, numérico-algébrique et numérico-fonctionnelle[14].

Structuration du milieu et activité de l'enseignant dans la phase de recherche

Classiquement, dans l'analyse descendante[15] du milieu, l'enseignant n'intervient pas dans les situations S-3 et S-2 et est simple observateur dans la situation S-1. Cette modélisation nous semble trop simple pour rendre compte de son rôle, même dans une situation comme celle-ci qui se prête particulièrement bien à une analyse dans le cadre de la TDS.

L'enseignant joue en effet un rôle non réduit à celui d'observateur au niveau S-1 de la situation d'apprentissage. C'est lui qui propose des valeurs qui vont permettre aux élèves de tester leur méthode. Il participe donc de façon essentielle aux rétroactions du milieu par le choix des valeurs qu'il effectue et, face à ce que serait le fonctionnement d'un milieu aveugle

---

[14] Nous aurions pu aussi distinguer suivant les types d'expressions, toutes ne présentant pas les mêmes caractéristiques, mais ceci complexifiait trop l'analyse et nous avons renoncé.

[15] La structuration du milieu que nous venons de présenter très synthétiquement correspond à ce qui est dénommé dans la TDS la structuration descendante. C'est la première à être intervenue. Elle a été ensuite complétée par un structuration ascendante organisée, elle, par rapport à l'enseignant, qui acteur dans S0, construit la situation en S1, envisage une progression dans S2…

choisissant des valeurs au hasard[16], il se comporte comme un milieu « intelligent ». Sans changer le jeu a-didactique, il peut en renforcer l'efficacité en proposant des nombres auxquels les élèves n'ont pas encore pensé : nombres négatifs, nombres rationnels par exemple, en choisissant les valeurs pour aider à invalider telle ou telle conjecture. Dans certains cas même, on peut penser que l'enseignant que nous avons jusqu'ici associé à un milieu antagoniste (il essaie de gagner contre l'élève), va jouer au contraire comme élément d'un milieu allié, s'il s'agit par exemple d'encourager le travail d'un groupe en difficulté. Il peut d'ailleurs jouer ce rôle dès le niveau S-2 de la situation de référence. On pourrait ainsi envisager que, dans la phase de recherche, confronté à des groupes qui progressent peu, l'enseignant cherche à les aider. Dans le cadre numérique, il pourrait par exemple proposer des valeurs entières successives pour suggérer une stratégie de balayage systématique, ou même suggérer aux élèves d'organiser mieux les résultats obtenus en utilisant par exemple une représentation sur la droite réelle. Il pourrait aussi, si les élèves n'ont pas choisi de valeur annulant l'expression en proposer une lui-même, pour attirer l'attention sur le rôle des zéros de l'expression. Il pourrait enfin, si ce rôle commence à être perçu, encourager un passage au cadre algébrique en attirant l'attention des élèves sur le lien entre les valeurs qui annulent l'expression et les facteurs de l'expression algébrique. Parmi ces interventions possibles, celles consistant à proposer des valeurs ne le font pas en principe sortir du rôle qui lui est imparti par le scénario dans cette phase de recherche. En revanche, ce n'est plus le cas pour celles qui consistent à suggérer un changement de représentation ou de cadre. Vu le statut expérimental de cette situation, les enseignantes ne se sont sans doute pas permis d'aider sensiblement les élèves et ceci peut expliquer que, dans les deux classes, quelques groupes aient très peu progressé.

Structuration du milieu et travail de l'enseignant dans la phase de bilan

L'analyse du travail des enseignantes, dans la phase de bilan a, elle aussi, fait ressortir un certain nombre de phénomènes intéressants. Considérons une fois de plus, à titre d'exemple, le fonctionnement de la première enseignante. Si on utilise pour en rendre compte les situations emboîtées, on voit apparaître des régularités évidentes. En effet, l'enseignante projette chaque groupe qui vient présenter son travail au niveau S–2 de la situation de référence, puis essaie de lui faire exploiter le milieu de référence (M-1) issu de cette situation, pour le faire aller un peu plus loin dans l'apprentissage qu'il n'y était allé spontanément. Il y a donc, au sein de S0, reconstitution d'une situation S'-1 d'apprentissage, avec une fonction d'enrichissement. Ce travail est subtilement dosé et l'on mesure bien là l'expertise de l'enseignante. Pour le premier groupe qui en est resté à une stratégie numérique ponctuelle, il s'agit d'essayer de permettre le passage à une vision plus globale du problème mettant en jeu des intervalles. Pour ceux un peu plus avancés, cette reconstruction visera plus directement une transition vers l'algébrique via la recherche de raisons, et pour ceux ayant travaillé dans un cadre fonctionnel, une progression dans ce cadre et un début d'articulation avec l'algébrique. Adaptée au vécu de chaque groupe, cette projection est de plus gérée de manière à permettre une avancée progressive de la connaissance, au fil de la synthèse collective et la construction d'une cohérence collective de la classe. Chaque épisode, enfin, se termine par une conclusion ou un apport de l'enseignant clairement lui au niveau S0, dans un registre qui est cette fois celui de l'institutionnalisation locale.

Les apports de cette dimension d'analyse :

L'intégration de ces notions moins classiques de la TDS s'est révélée pour nous, comme le lecteur l'aura senti, plus complexe que ce qui avait précédé. Nous avons eu l'impression d'avoir affaire tout d'un coup à des notions encore peu stabilisées, empreintes d'un certain flou. Nous avons éprouvé, de plus, le besoin de prendre certaines libertés par rapport aux usages les plus couramment cités, pour faire de ces notions des outils efficaces d'analyse,

[16] On pourrait tout à fait imaginer ceci dans cette situation si le rôle d'oracle était par exemple assuré par un ordinateur proposant une valeur aléatoire à l'élève puis testant la valeur de sa réponse.

dans le cas qui nous intéressait. Nous avons ainsi intégré l'enseignant dans le milieu aux niveaux S-2 et S-1, et il nous a paru important aussi de reconnaître la mobilité des positions des acteurs dans la situation didactique S0 pour rendre compte du travail de l'enseignant et de son expertise. Tout ceci a suscité, au sein de notre groupe, de nombreuses discussions.

Le travail qu'a nécessité cette intégration a donc été lourd et complexe, et l'on peut légitimement questionner l'intérêt d'un tel investissement. Pour nous, il a cependant joué un rôle important, en faisant bouger notre regard sur la situation. Expliquons-nous sur ce point. Les premières analyses que nous avions faites nous donnaient à voir une situation que l'on pouvait appréhender dans son unité, en dépit des diverses dynamiques potentielles évoquées. On y notait des points d'équilibre peu nombreux par rapport auxquels s'organisait une analyse visant à préciser s'ils étaient ou non attractifs et quelle était la force de cette attraction. L'entrée par la structuration des milieux, sans contredire cette analyse, a fait exploser cette vision. Dès lors que nous essayions de prendre en compte la diversité des connaissances susceptibles d'intervenir, des interactions possibles avec le milieu et leurs effets possibles aux différents niveaux, de la situation de référence à la situation didactique, une diversité insoupçonnée se faisait jour, les bifurcations de dynamique se multipliaient. Nous avons ainsi mieux pris la mesure du rôle joué par le jeu collectif, en acquérant au fil du travail la conviction que l'individuel (ici le groupe) échappait à nos possibilités de prévision et que, ce qui seul pouvait être accessible et utile, ce qui importait pour l'analyse didactique, c'était le potentiel collectif que pouvait fournir la phase de recherche. L'éclatement posait aussi, inévitablement, la question de la récupération de ce potentiel collectif et de sa gestion, de la reconstruction d'une cohérence de classe dans la situation didactique S0 qui correspond ici à la phase de bilan collectif. Et nous avons été conduits à interroger l'action de l'enseignant dans cette perspective, en mesurant mieux la complexité de sa tâche. Ce n'était pas le cas au début, les visions véhiculées par les premières analyses étaient sans aucun doute trop condensées pour permettre de bien appréhender cette complexité.

III.6 La perturbation calculatrice et le cadre de l'instrumentation

Comme nous l'avons signalé au début, la synthèse collective, dans la deuxième classe, a été perturbée par l'irruption des calculatrices, initialement interdites. Là encore, une analyse dans le cadre de la TDS est possible, nous conduisant à analyser comment l'analyse *a priori* est modifiée si des calculatrices graphiques sont ajoutées au milieu matériel.

Perturbation calculatrice : nécessité d'un retour sur l'analyse *a priori* :

L'introduction de calculatrices modifie sans aucun doute substantiellement les moyens d'action de l'élève, leur économie, et les rétroactions qu'il reçoit du milieu. Cette évolution, dans le cas de calculatrices graphiques, se situe à la fois dans les cadres numériques et fonctionnels.

Par exemple, les calculatrices graphiques disposant d'une application « Table », ceci permet théoriquement à l'élève d'obtenir très facilement un grand nombre de valeurs de l'expression, pour des valeurs régulièrement espacées de la variable. Il peut aussi, en faisant varier le pas de la table, raffiner l'exploration, globalement ou dans une zone précise, par exemple au voisinage d'un changement de signe observé, ou de petites valeurs (en valeur absolue) prises par l'expression. On peut alors penser que cette interaction avec le milieu, même si elle se situe dans un cadre numérique de calculs et d'affichage ponctuels, va permettre à l'élève de rentrer dans une perspective globale et de prendre conscience assez vite de l'existence et la succession de plages où l'expression est de signe constant. La détermination des bornes des intervalles ne va cependant pas de soi dans le cas où ce ne sont ni des entiers de taille raisonnable, ni des décimaux simples, parce que l'application table fonctionne en calcul approché décimal et qu'en général l'exploration reste dans une zone de taille limitée. La valeur des zéros est donc ici une variable didactique cruciale, peut-être même plus qu'en papier-crayon car, si les élèves arrivent avec la machine à une bonne approximation de la borne rationnelle d'un intervalle, l'enseignant ne pourra pas aisément la déstabiliser en proposant un calcul simple, sauf à donner la valeur exacte de la borne elle-même. Le travail avec l'application Table de la calculatrice peut donc fournir rapidement de nombreux résultats, aider à sortir d'un rapport ponctuel à la situation, même en restant dans le cadre numérique, conduire à des conjectures globales correctes ou erronées, suivant les valeurs des zéros, les conjectures erronées étant cependant moins faciles à invalider que dans l'environnement papier / crayon, dans le jeu a-didactique proposé aux élèves.

Le travail avec la calculatrice peut aussi se situer dans l'application graphique. C'est alors d'emblée la vision globale qui est privilégiée, avec le tracé instantané de la représentation graphique de la fonction associée à l'expression. La vision ponctuelle ne peut-être que reconstituée dans un second temps, via par exemple la commande *Trace* qui permet d'obtenir l'affichage des coordonnées de points de la courbe. Cette vision globale devrait *a priori* amener à la conviction que le signe est stable par intervalles, mais la délimitation des bornes des intervalles, même dans le cas de valeurs assez simples, risque ici d'être problématique. En effet, si dans l'application *Table,* c'est l'utilisateur qui pilote la discrétisation, dans le cas d'un tracé graphique ce n'est plus le cas et, par exemple, un balayage par *Trace* n'a aucune raison de passer par les valeurs entières de la variable.

En fait, la situation est même plus complexe car, suivant les expressions, on va rencontrer différents cas :

- dans la fenêtre standard, la représentation graphique est continue et donne une perception correcte de l'évolution du signe de l'expression,
- dans cette fenêtre, la représentation graphique est continue mais elle ne donne pas une perception correcte de l'évolution du signe de l'expression car des zéros très proches ne sont pas séparés par la discrétisation,
- dans cette fenêtre, le graphe présente des ruptures dues à l'existence de valeurs prises hors de la fenêtre standard mais reste globalement extrapolable,
- dans cette fenêtre, le graphe présente des distorsions fortes par rapport au tracé générique que l'on effectuerait dans une représentation papier / crayon, avec notamment des segments verticaux,

ces différents éléments pouvant d'ailleurs se combiner pour produire, par exemple, des tracés à distorsions fortes et dont la partie continue induit de plus en erreur.

Le fait d'avoir choisi des expressions polynomiales comportant au moins trois facteurs et avec des coefficients entiers se traduit presque inévitablement par la présence de distorsions fortes. Si l'on considère, pour ne citer qu'un exemple, l'expression qui a accompagné dans ce texte la présentation de la situation, son tracé dans la fenêtre standard d'une TI83 est formé de deux traits verticaux, l'un pour x=-5 et l'autre collé à l'axe des y puis, dans la partie de l'écran correspondant aux abscisses positives, d'un tracé continu compris approximativement entre les abscisses 0,5 et 2,5, coupent trois fois l'axe des abscisses (cf. figure 2).

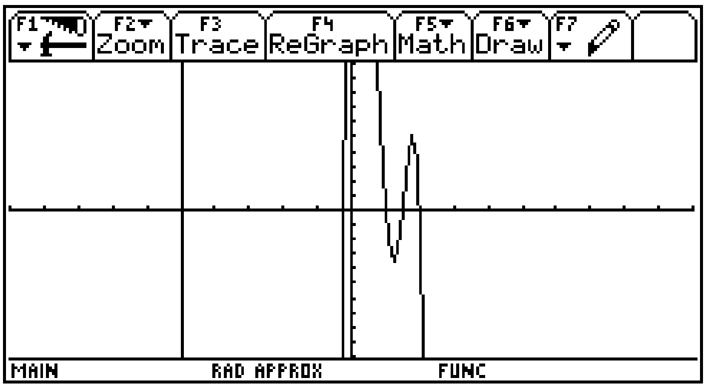

Figure 2 : Tracé de l'expression polynomiale dans la fenêtre standard

La capacité à exploiter efficacement les rétroactions du milieu va donc dépendre fortement du niveau d'instrumentation[17] des calculatrices des élèves. Si, comme c'est à prévoir de la part d'élèves de seconde qui n'ont pas encore rencontré d'objets fonctionnels complexes, les compétences instrumentales restent très limitées, on peut s'attendre à des difficultés. Il se peut par exemple que les élèves ne sachent pas ajuster le pas de variation dans *Table* aux besoins de l'exploration des valeurs prises ou ne pensent pas à le faire, cette démarche ayant été par trop occasionnelle pour être disponible. Les potentialités offertes par l'exploration dans *Table* en seront alors sérieusement affectées. Il se peut aussi que les élèves n'aient pas développé de schèmes de cadrage dans l'application graphique (Artigue et Lagrange, 1998). Ils auront alors des difficultés à interpréter correctement les effets de discrétisation des tracés graphiques et à mener une exploration graphique efficace. Celle-ci suppose en effet, compte-tenu des caractéristiques des fonctions mentionnées ci-dessus, des changements de fenêtre permettant d'explorer les différentes parties du graphe. Pour toutes ces raisons, le travail avec les calculatrices peut ici conduire à des conjectures erronées, à des situations de blocage ou faire bifurquer le jeu initial, le groupe se fixant une nouvelle tâche : celle de produire des graphes plus « normaux ».

On le voit donc, l'introduction de calculatrices graphiques dans le milieu introduit dans l'analyse *a priori* des changements importants et accroît l'incertitude des issues du jeu a-didactique. Il n'y a cependant pas de raison de supposer qu'elle facilitera la connexion avec le travail algébrique visé. Les potentialités de calcul de la machine ne la favorisent pas dans le cas d'un travail instrumenté qui se situerait dans le cadre numérique. Et, même dans le cas où des élèves disposeraient de calculatrices symboliques, y a peu de chances, compte-tenu des résultats des recherches déjà menées sur ces environnements, que les élèves, spontanément, dans le cadre fonctionnel, fassent appel au registre symbolique algébrique pour résoudre les problèmes qu'ils ne manqueront pas de rencontrer avec les représentations graphiques[18].

Dans cette analyse *a priori* qui reste globalement dans le cadre de la TDS, soulignons que l'approche instrumentale déjà citée a été pour nous un appui essentiel. Elle l'a été aussi ensuite pour comprendre la gestion de la perturbation par l'enseignante de la deuxième classe que nous allons aborder maintenant.

Perturbation calculatrice : la nécessité d'un nouveau regard sur l'enseignant :

Certains élèves de cette classe ont, en effet, utilisé leur calculatrice et ils l'ont fait en utilisant l'application graphique. Ils se sont alors retrouvés avec des représentations graphiques à distorsion forte. L'enseignante aurait pu bien sûr récuser ces productions du fait de leur caractère hors contrat mais ce n'est pas le choix qu'elle a fait. Pour comprendre ce choix, il nous faut cette fois sortir des cadres d'analyse privilégiés jusqu'ici, car ce qui est en jeu c'est d'abord, nous semble t-il, une question de cohérence globale, sur laquelle nous reviendrons plus largement dans la partie suivante de cet article. Cette enseignante est en effet une enseignante habituée de longue date à utiliser dans son enseignement calculatrices et logiciels. Ces outils sont complètement intégrés à son travail mathématique et elle souhaite qu'ils deviennent aussi des instruments pour ses élèves. Elle pense son enseignement de seconde, une classe nouvelle pour elle qui a enseigné jusqu'ici en collège, dans cette optique. Elle sait que la maîtrise des représentations graphiques de la calculatrice, qu'une utilisation efficace des tables de valeurs ne sont pas choses faciles et a l'intention de travailler ultérieurement sur ces questions car, pour elle, l'enseignement des fonctions en seconde doit exploiter ces différents registres d'expression sémiotique et leurs interactions. Il lui est donc, nous semble t-il, plus difficile qu'à d'autres enseignants, de récuser, pour des

[17] On pourra se référer au glossaire pour plus de précision sur ce terme et l'approche instrumentale plus globalement.
[18] On pourra notamment se référer à la thèse de B. Defouad (Defouad, 2000) pour une mise en évidence des difficultés d'articulation des différents cadres et registres de travail offerts par la calculatrice.

raisons de contrat didactique, un travail mené par les élèves avec les calculatrices, tout en se sentant en cohérence avec ses convictions profondes. A ceci vont s'ajouter plusieurs phénomènes. Cette enseignante a l'habitude d'utiliser des technologies informatiques mais a enseigné depuis de nombreuses années dans des établissements correctement équipés, et elle s'est d'ailleurs largement impliquée dans cet équipement. Pour son enseignement, elle disposait notamment d'un rétroprojecteur et d'une tablette rétro-projetable, conditions minimales pour une gestion raisonnable d'un travail de classe avec calculatrices. Elle vient d'être nommée dans un lycée prestigieux mais où elle se trouve privée de tels équipements. Elle est donc privée d'un certain nombre de ses moyens usuels d'action mais n'en a pas forcément perçu toutes les conséquences. Enfin, nouvelle dans cet établissement, elle n'a pas encore assis sa légitimité. Le fait qu'elle interdise, pour une séance, les calculatrices, n'est pas nécessairement suivi d'effet, comme il le serait quelques années plus tard quand nous menons ces analyses. Il lui est aussi plus difficile de gérer une situation comme celle-ci qui est marginale par rapport à la culture de l'établissement.

La gestion de la synthèse, dés ses débuts, s'en ressent. Les élèves s'impliquent difficilement dans le travail collectif, elle est obligée de les rappeler fréquemment à l'ordre. Certains pianotent sur leur calculatrice et face à un groupe qui, au tableau, est un peu en difficulté, une attention générale qui baisse, elle va choisir de faire intervenir ces productions calculatrices. Elle s'attend à des difficultés mais non pas à ce qui se produit. Demandant en effet à un élève de reproduire au tableau (puisqu'il n'y a pas de moyen de projection) le tracé de la calculatrice, elle se retrouve avec un tracé comportant un trait vertical ; mais ce trait vertical ne perturbe pas outre mesure les élèves, contrairement à ses attentes, après un chapitre sur la notion de fonction. Elle ne peut laisser passer le phénomène et voudra que la classe perçoive qu'une telle représentation est en contradiction flagrante avec la définition de la notion de fonction. Comme l'on s'en doute, au vu de ce qui précède, cela n'ira pas sans mal. Mais si la représentation ne peut être exactement verticale, dans quel sens « penche-t-elle » ?. Pour répondre à cette question, si l'on reste dans le registre graphique, il faut travailler sur le cadrage. Les élèves n'ont visiblement développé aucune compétence instrumentale dans ce domaine. Ne disposant pas d'une tablette rétro-projetable, elle ne peut prendre en charge elle-même les tracés. La gestion devient donc de plus en plus difficile, mais elle ne baisse pourtant pas les bras. Elle ne les baissera pas mais au prix de quel inconfort ?

Nous ne développerons pas plus avant l'analyse menée sur cette seconde séance collective mais nous espérons avoir fait sentir au lecteur que les cadres d'analyses que nous avons utilisés jusqu'ici, tout en nous aidant à prévoir les difficultés engendrées par l'introduction des calculatrices, sont limités quand il s'agit de comprendre ce déroulement et les décisions de l'enseignante. Ceux-ci ne peuvent s'expliquer, nous semble-t-il, sans faire intervenir des instruments sensiblement différents. C'est dans ce but, notamment, que nous avons intégré aux outils d'analyse utilisés, dans la seconde phase de la recherche, une double approche ergonomique – didactique pour l'analyse des pratiques enseignantes, comme nous l'avons précisé au début de ce texte.

III.7 Conclusion partielle

Nous avons rendu compte, dans cette partie, des analyses menées sur la situation du signe d'un polynôme. Ces analyses ont mobilisé essentiellement deux cadres théoriques : la dialectique outil/objet et les jeux de cadre d'une part, la théorie des situations didactiques d'autre part. Comme nous avons essayé de le montrer, même s'il s'agit de deux cadres différents, les approches de l'apprentissage et de l'enseignement dont ils témoignent sont fondamentalement proches. Il est donc assez aisé de les faire communiquer et de faire jouer entre eux certaines complémentarités : tirer parti d'une part des outils d'analyse que fournit la notion de cadre, en jouant de plus sur la complémentarité entre cadres et registres qui n'était pas présente pas dans les travaux fondateurs de R. Douady[19], tirer parti d'autre part des outils fournis par la notion de milieu et les structurations associées. L'exploitation conjointe de ces deux cadres nous a permis d'analyser *a priori* les potentialités et limites de cette situation vis à vis des apprentissages visés, d'anticiper les niveaux possibles d'activité mathématique des élèves. De même, nous n'avons pas éprouvé de difficulté particulière à faire interagir ces cadres théoriques avec certains éléments de l'approche instrumentale quand il s'est agi de prendre en compte dans l'analyse *a priori* la perturbation calculatrice. La confrontation aux réalisations effectives a montré la pertinence de ces analyses. Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, la structure de cette situation, les principes à la base de sa construction, favorisaient sans doute cette pertinence. Pourtant même dans ce cas, comme nous avons essayé de le montrer, si l'analyse a une force évidente pour penser le travail mathématique de l'élève, on sent poindre certaines limites en ce qui concerne l'analyse du travail de l'enseignant, la compréhension de son fonctionnement, de ses choix, des choix qui conditionnent l'activité mathématique des élèves. Qu'en est-il de ces potentialités et limites pour l'analyse de situations de classe plus ordinaires ? C'est ce que nous aborderons maintenant, en analysant la vidéo associée à la situation du glenatri.

IV. LA SITUATION DU GLENATRI

IV.1 Présentation

Cette situation, comme nous l'avons déjà mentionné, a été réalisée par une professeure stagiaire PLC2, pour une séance de module d'une heure et demie en seconde. Elle est présentée aux élèves comme une activité introduisant les fonctions et fait suite à une définition de cette notion rapidement donnée à la fin de la séance précédente. Le contexte est un contexte géométrique : on s'intéresse aux triangles rectangles dont l'hypoténuse AB est fixe et a pour longueur 6 cm. Ces triangles sont appelés glénatris et les longueurs des deux côtés de l'angle droit CA et CB sont désignées respectivement par x cm et y cm. L'activité est organisée en trois phases :

Dans la première, intitulée « Préliminaires », on demande :

1) quelle est la figure géométrique où se trouve le sommet C de chaque glénatri,
2) de déterminer la valeur de x correspondant à un glénatri isocèle, de calculer son aire et de faire une figure.

Dans la deuxième, intitulée : « Une première fonction de x », on demande :

1) de calculer y en fonction de x, de donner l'ensemble I des valeurs que peut prendre le réel x, de donner la fonction qui exprime comment y varie en fonction de x,
2) de compléter un tableau de valeurs de f(x) où x varie de 0 à 6 par pas de 0,5 en arrondissant les valeurs au dixième près,
3) de placer, sur une feuille de papier millimétré, un repère orthonormal (O, i, j) avec 1 cm pour unité, de construire les points de la courbe représentative Cf de f obtenus avec le tableau précédent, de tracer la courbe Cf et enfin de dresser le tableau de variation de f.

Dans la troisième, intitulée : « Aire d'un glénatri : soit z cm^2 l'aire d'un glénatri, on demande :

1) de calculer z en fonction de x et de donner la fonction g qui exprime comment z varie en fonction de x,

[19] Pour une étude des rapports entre cadres et registres, on pourra se référer aux actes de la journée organisée en 2001, en l'honneur de R. Douady (Perrin & Robert, 2001).

2) la représentation graphique de g étant fournie sur une feuille jointe, de déterminer quelle est l'aire maximale d'un glénatri et pour quelle valeur de x cette aire maximale est atteinte, puis de démontrer ce résultat géométriquement,
3) de dresser le tableau de variation de g,
4) de déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation g(x)=7 et de donner une valeur approchée de ces solutions, enfin de dessiner le plus soigneusement possible un glénatri d'aire 7 cm^2.

Cette situation n'a pas été construite en se référant à un cadre théorique précis. Rien n'empêche cependant d'essayer d'exploiter les cadres existants pour analyser *a priori* les potentialités mathématiques de cette situation, puis confronter cette analyse à la vidéo. C'est ce que nous avons d'abord fait et résumons dans la partie suivante.

IV.2 Les premières analyses

Adoptant une perspective très proche de celle développée dans la première situation, nous avons d'abord essayé d'analyser les potentialités du problème posé pour introduire la notion de fonction et en faire sentir l'intérêt. Dans un premier temps, nous l'avons fait en prenant uniquement en considération le contexte global du travail proposé : l'objet glénatri et la question de la variation de son aire. Force est alors de reconnaître que si le problème mathématique à résoudre est celui des variations de l'aire et, en particulier, la recherche de l'aire maximum, la modélisation fonctionnelle proposée est de peu d'intérêt. Prenant comme variable la longueur d'un des côtés de l'angle droit, elle détruit la symétrie géométrique du problème et en complique inutilement la résolution. Cette première analyse mettait donc clairement en évidence que, si le problème que l'on voulait résoudre était bien celui des variations de l'aire, la modélisation proposée n'était en rien un objet optimal. Ceci nous conduisait, assez naturellement, à rejeter la construction de la stagiaire ou, au moins, à vouloir la modifier substantiellement.

Dans un deuxième temps, respectant davantage les choix de la professeure stagiaire, nous avons décidé de prendre pour contexte l'objet glénatri et les dépendances fonctionnelles qu'il est susceptible de mettre en jeu, quand on choisit comme variable indépendante la longueur d'un des côtés de l'angle droit. Nous nous sommes alors intéressés aux potentialités de ce contexte pour faire vivre de façon a-didactique cet enjeu ou, si l'on utilise le langage de la DOO, pour faire vivre, comme outil implicite, la notion de fonction. Ceci nous a conduit dans le travail du groupe comme en formation (Artigue et al., 2002) à des analyses relativement voisines : le contexte proposé se prêtait bien à la problématisation de la notion de dépendance fonctionnelle, dans un jeu entre cadres géométrique, numérique et algébrique. Mais les scénarios élaborés pour soutenir ces analyses n'avaient que peu de choses à voir avec celui de la professeure stagiaire. Ils ne respectaient en rien la logique de sa construction et, de ce fait, ne nous aidaient pas réellement à comprendre l'activité mathématique de ses élèves au fil de la séance.

Dans un troisième temps, nous avons alors décidé d'utiliser la théorie des situations didactiques pour analyser la situation telle que construite par la stagiaire, en respectant son organisation mathématique et didactique. Une telle analyse est bien sûr possible et la littérature didactique nous en a offert des exemples tout à fait intéressants ces dix dernières années. Ce fut également un des thèmes abordés, à propos de la TDS, à la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (cf. le chapitre relatif à la TDS dans les actes de cette école (Dorier & al., 2002)). Nous nous interrogeons cependant sur l'intérêt autre que théorique d'une telle analyse dans le cas présent. En effet, ceci nous a conduit à modéliser cette situation de classe par une succession de situations, quasiment une par question posée, car ce n'est pas le même jeu qui est en permanence à l'œuvre. Pour chacune de ces situations, on est alors amené à préciser ce qu'est le milieu et ce que peuvent produire les interactions avec ce milieu. Cette analyse n'est pas facile car les situations ne sont pas indépendantes les unes des autres mais imbriquées. De plus, on constate rapidement que les interactions avec le milieu sont insuffisantes à produire la connaissance visée et, comme l'a bien montré I. Bloch dans sa thèse (Bloch, 2000), on ne peut alors faire l'économie d'introduire les médiations potentielles de l'enseignant et leurs effets dans le modèle. Pour une séance d'une heure et demie, on se retrouve ainsi avec une construction extrêmement complexe. Jusqu'à quel point est-ce un instrument réellement adapté pour rendre compte du travail mathématique des élèves dans cette séance et en apprécier la qualité ? Il nous est permis d'en douter et, dans le travail de notre groupe, ce doute s'est nourri de différents éléments :

- d'abord la lourdeur de l'analyse qui nous paraissait d'un coût démesuré par rapport à ce qu'elle permettait d'atteindre,
- mais aussi l'impression que la construction que nous élaborions, même si elle présentait un intérêt certain, nous éloignait des cohérences sous-jacentes au fonctionnement de la professeure stagiaire, nous rendait essentiellement visibles les faiblesses de sa construction, et difficile une médiation didactique qui aurait su reconnaître et valoriser les points forts de cette construction.

Car le visionnement de la vidéo montrait indéniablement une classe qui, pendant une heure et demie travaillait et faisait des mathématiques, une classe où les élèves avaient une responsabilité limitée certes mais indéniable dans ce qui se construisait, une classe où les enjeux de savoir étaient loin d'être absents, où le jeu de la rationalité mathématique trouvait à s'exercer même si c'était de façon locale, une classe enfin où les élèves n'étaient pas réduits à la simple position d'exécutants. C'est pour essayer d'en rendre compte que nous avons alors décidé d'exploiter une autre approche complémentaire : celle offerte par la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes développée par A. Robert, dont les potentialités pour l'analyse du fonctionnement de classes ordinaires avaient été particulièrement bien mises en lumière par la thèse d'E. Roditi.

IV.3 La situation des glénatris à travers le filtre de la double approche

Dans ce cadre, l'activité du professeur « tournée vers ses élèves » est étudiée autant que l'activité « tournée vers soi ». Les analyses développées prennent en compte les dimensions personnelle et socio-institutionnelle des pratiques, aussi précisons-nous que la professeure est une stagiaire PLC2 dont la classe en responsabilité est une classe de seconde ordinaire d'un établissement standard dont les élèves ne posent pas de difficultés particulières. Les outils utilisés pour analyser la séance ont été développés par E. Roditi pour une recherche sur les pratiques ordinaires d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux. L'analyse de cette séance est introduite par une étude de la composante personnelle des pratiques de cette enseignante. Une telle étude donne un accès particulier aux pratiques qui est utile pour comprendre quels sont objectifs globaux visés quant aux activités mathématiques des élèves. Cette analyse a été possible parce que la professeure, qui était stagiaire au moment de l'observation, a été suivie durant toute son année de stage par A. Lenfant dans le cadre de sa recherche sur l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de professeurs de mathématiques débutants.

Puis la séance elle-même est analysée. L'étude du *champ mathématique* de la séance et de la *stratégie d'enseignement* conduisent respectivement à l'analyse des choix globaux du professeur quant aux contenus abordés en classe et quant à leur organisation. L'étude comparée des *tâches* proposées aux élèves et de leurs *activités effectives* montre parfois des décalages, engendrés par les accompagnements du professeur : rappels, indications, aides méthodologiques, questions complémentaires, etc. Ces décalages témoignent de choix locaux qui renforcent ou qui relativisent la portée des choix globaux et qui sont effectués par le professeur durant le déroulement de la séance. Dans cet article, nous ne procéderons pas à une analyse complète des tâches proposées et des activités des élèves. Après une étude globale du projet de la professeure, nous étudierons seulement quelques exemples de choix effectués durant le déroulement de la séance en adaptation aux réactions des élèves : des réactions qui constituent des *incidents* par rapport au scénario prévu, des choix qui montrent comment l'activité du professeur, simultanément, répond à une ambition d'apprentissage des élèves et à des contraintes du métier.

IV. 3. 1. Une analyse de la dimension personnelle des pratiques, quels liens avec l'activité mathématiques des élèves en classe ?

Cette enseignante débutante a été suivie pendant toute son année de stage dans le cadre de la thèse d'A.Lenfant. Dans cette recherche, l'analyse de multiples données recueillies au cours de ce suivi individuel (des entretiens réguliers, les notes personnelles de la professeure, ses textes de contrôles, des copies et des cahiers d'élèves…) a conduit à la constitution d'un profil permettant de rendre visibles des cohérences dans son rapport professionnel à l'algèbre, des évolutions et les raisons de ces évolutions. Ce travail a permis, en particulier, d'établir des éléments de la composante personnelle des pratiques de cette enseignante, dont la connaissance permet de comprendre certains des choix faits relativement à l'activité des élèves en classe. C'est cet éclairage que nous proposons dans ce paragraphe.
Commençons par présenter brièvement cette stagiaire et quelques éléments relatifs à sa propre vision des mathématiques et de leur enseignement. Depuis très longtemps attirée par le métier de professeur, plus particulièrement par sa dimension sociale, elle considère que le professeur de mathématiques est une personne qui doit aider ses élèves à réussir dans cette discipline en leur apportant des savoir-faire et en leur apprenant à développer une certaine autonomie face au travail. Cette personne se sent, en fait, très à l'aise dans son nouveau métier et se positionne très vite dans une posture d'enseignante. Ceci apparaît dans sa vision de l'algèbre qui intègre dès la rentrée des objets étudiés dans le secondaire (polynômes, équations)[20] ou dans une mise en place rapide de stratégies d'enseignement cohérentes dont certaines caractéristiques vont rester stables durant toute l'année scolaire.
Les mathématiques représentent pour elle structure et logique ; elle apprécie particulièrement qu'elles nécessitent de la recherche et que leur apprentissage ne se limite pas à apprendre par cœur différents résultats. Pour elle, cette matière constitue à la fois un moyen de développer sa propre logique grâce au travail de recherche qu'elle nécessite et un outil à la disposition d'autres disciplines telles que les sciences physiques.
Sa vision de l'enseignement de l'algèbre est, comme pour tous les stagiaires suivis dans le cadre de la recherche d'A.Lenfant, fortement centrée sur la dimension objet de ce domaine des mathématiques. Cet élément de la composante personnelle de ses pratiques la conduit à donner une place prépondérante à la maîtrise des techniques de calcul. Dès le début de l'année, l'organisation du travail de ces techniques est très cohérente et structurée : dès qu'une technique est rappelée ou introduite, l'enseignante propose un ensemble d'exercices destinés à amener les élèves à la travailler sur des spécimens pas trop complexes. Après cette application directe, elle sélectionne des exercices qui vont conduire les élèves à approfondir ou à améliorer la technique étudiée. Cette caractéristique du travail technique se retrouvera tout au long de l'année. En revanche, l'étude met en évidence une évolution dans sa vision de l'introduction de nouvelles techniques. En effet, au début de l'année, ses pratiques sont caractérisées par une ostension, au moyen de fiches-méthodes, les techniques à acquérir. Mais, au cours de l'année, elle adopte une attitude réflexive par rapport à cette pratique et prend conscience que certains élèves, apprenant par cœur les techniques, les appliquent sans les comprendre. Cet apprentissage de l'algèbre, par automatisme qu'elle induit, ne correspondant pas à sa vision personnelle des

[20] Dans le but de faire émerger certains éléments de la vision initiale de l'algèbre en début d'année des professeurs stagiaires suivis dans le cadre de sa thèse, A.Lenfant leur a demandé de remplir un questionnaire écrit constitué de deux questions : « Donnez cinq termes à associer au mot « algèbre » », « Pour vous, à quoi sert l'algèbre en mathématiques ? ». L'analyse des réponses obtenues a montré que pour la majorité des personnes suivies le mot « algèbre » fait référence à l'algèbre étudiée à l'université, celle des structures algébriques.

mathématiques, elle va modifier ses pratiques et laisser plus de place à ses élèves dans les moments d'élaboration de techniques. Cette volonté de laisser des responsabilités mathématiques à ses élèves apparaît au cours de la séance filmée, comme vont le montrer les analyses suivantes.

IV. 3. 2. Analyse du scénario prévu pour la séance

Pour analyser le scénario prévu, on détermine d'abord, comme précisé plus haut, le champ mathématique de la séance et la stratégie d'enseignement. Le champ mathématique de la séance est l'ensemble des contenus abordés durant la séquence : les notions, les situations, les représentations symboliques et leurs transformations éventuelles, les propriétés et les théorèmes. Ce champ, délimité par le professeur, est comparé avec celui qu'on pourrait définir *a priori* sachant les objets nouveaux qui doivent être enseignés et les relations qu'ils entretiennent avec les connaissances des élèves. La stratégie d'enseignement est la ligne directrice générale de l'organisation didactique que le professeur utilise comme une référence pour choisir les tâches qu'il va proposer aux élèves mais aussi pour adapter son enseignement aux réactions de sa classe.
Une analyse complète comprendrait aussi une étude des tâches proposées reposant sur différents indicateurs développés en didactique des mathématiques : le caractère outil ou objet de la notion visée dans ces tâches, la dialectique ancien / nouveau, les modes de raisonnement à mobiliser, les niveaux de mise en fonctionnement des notions (application simple et isolée, mobilisable, disponible), les cadres et les registres convoqués avec d'éventuels changements, les moyens de contrôle externe ou interne des résultats et des moyens, enfin, en ce qui concerne les questions posées et les méthodes à mobiliser, on repère le degré d'ouverture, de généralité, de formalisation et d'implicite.

Elle dépasse cependant le cadre d'un tel article et c'est pourquoi, dans ce qui suit, nous nous limiterons aux deux premières composantes de l'analyse, en commençant par la stratégie d'enseignement.

<u>La stratégie d'enseignement</u>
On se donne dans cette situation, une famille de triangles rectangles variables appelés « glénatris » dont seule l'hypoténuse (en tant que segment) est fixée. L'étude proposée est celle de cette famille de triangles : en fonction de l'un des deux côtés de l'angle droit x, on étudie les variations de l'autre côté de l'angle droit y et de l'aire z du triangle rectangle.
La lecture des consignes montre que l'objectif de la professeure est d'aborder les questions classiques sur les fonctions : expression de l'image en fonction de la variable, ensemble de définition, tableau de valeurs, représentation graphique, variations et tableau de variations, extremum, résolution graphique d'une équation du type $f(x) = a$.
La dialectique outil/objet n'est pas la même dans la situation du tableau de signe et dans celle des glénatris car dans cette dernière, la notion nouvelle n'apparaît pas comme un outil de résolution de problème. C'est la situation posée dans le cadre géométrique qui va permettre, avec des outils anciens, de traiter les questions posées dans le cadre des fonctions et des graphiques où sont situés les objets nouveaux.
L'objectif de cette séance est donc de faire rencontrer aux élèves un certain nombre de notions concernant les fonctions qu'ils travailleront ensuite de façon détaillée. Le choix de la professeure n'est évidemment pas de traiter l'ensemble de ces notions durant la séance mais bien seulement de les aborder pour dresser un panorama des questions qu'on se pose à ce niveau lorsqu'on étudie une fonction. Les connaissances anciennes des élèves à propos des fonctions concernent les fonctions affines, elles ne sont pas convoquées dans cette séance.

<u>Un champ mathématique très riche</u>
A la lecture de la fiche proposée aux élèves et présentée en IV.1, on repère les notions mathématiques sous-jacentes, les méthodes à employer et les formes symboliques à utiliser à et à transformer. Compte tenu de l'objectif annoncé d'introduction à la notion de fonction,

nous distinguerons, dans le champ mathématique, ce qui est relatif à cette notion et ce qui ne l'est pas, ici les notions algébriques et géométriques.
La partie du champ mathématique relative à la notion de fonction est composée des éléments suivants : expression de y en fonction de x, notation d'une fonction, ensemble de définition d'une fonction, représentation graphique d'une fonction, variations d'une fonction, tableau de variations d'une fonction, extremum d'une fonction, interprétation de la position d'un point de la représentation graphique d'une fonction à l'aide du contexte dont la fonction est issue.
La partie du champ mathématique qui n'est pas relative à la notion de fonction comporte des éléments du champ de l'algèbre et des éléments du champ de la géométrie :
- écriture d'une expression algébrique, résolution d'une équation du type $x^2 = a$, résolution d'une inéquation du type $a^2 – x^2 > 0$ avec ou sans contrainte sur x, différence entre $\sqrt{a^2 - b^2}$ et $a – b$, comparaison de nombres et de leurs carrés ;
- caractéristique du cercle circonscrit au triangle rectangle, théorème de Pythagore, définition et propriétés du triangle isocèle, propriété : l'hypoténuse est le plus long des trois côtés d'un triangle rectangle, sa conséquence : quel qu'il soit, le diamètre d'un cercle est la corde la plus longue, expression de l'aire du triangle rectangle comme demi-produit de l'hypoténuse et de la hauteur associée ou comme demi-produit des côtés perpendiculaires.
La situation est donc très riche de contenus nouveaux et anciens. Le choix de la professeure, rappelons-le, n'est pas de traiter les notions durant la séance mais seulement de les faire rencontrer aux élèves. On repère des contenus du domaine de l'algèbre, ce qui n'est pas étonnant dans une séance d'introduction à la notion de fonction : les valeurs inconnues x, y et z vont être étudiées pour leurs variations relatives, y en fonction de x et z en fonction de x. Les fonctions f et g sont introduites respectivement comme des procédures pour passer de x à y et de x à z. On repère enfin les contenus du domaine géométrique nécessaires au traitement de la situation.
La situation proposée ici est très riche de contenus anciens, cette richesse est liée à la complexité de la situation géométrique qui doit permettre d'interpréter ce qui est observé sur les fonctions. Mais cette richesse risque aussi de perturber le déroulement prévu si les savoirs anciens ne sont pas mobilisables par suffisamment d'élèves de la classe. Les constats effectués lors de l'analyse de séances ordinaires, montrent que généralement, les professeurs façonnent leurs scénarios de manière à ce que l'ancien soit très réduit ; on peut penser que ce choix se fait alors au détriment de l'articulation entre ce qui est à apprendre et ce qui a été appris, on peut penser aussi que cela permet aux professeurs de garder une maîtrise suffisante sur le déroulement de la séance.

IV. 3. 3. Analyse de quelques épisodes du déroulement en classe

Le détail de chaque tâche n'est pas étudié ici, ni les activités correspondantes en classe, ni encore la comparaison entre tâches et activités. Nous avons choisi quelques épisodes qui montrent comment la double approche permet d'analyser les pratiques d'un professeur en fonction de l'apprentissage des élèves et des contraintes du métier. Ces épisodes particuliers comprennent des adaptations de l'enseignant à certaines réactions des élèves que nous qualifions d'incidents didactiques car, d'une part elles sont publiques et donc s'intègrent à la dynamique de la classe, et d'autre part, elles sont en décalage négatif par rapport à l'ensemble des réponses correctes envisageables ou attendues.
Chaque épisode est introduit par son titre qui identifie, non pas le contenu abordé, mais la pratique du professeur en fonction du scénario prévu et/ou des réactions de la classe.

<u>Des interventions pour ne pas s'écarter du scénario prévu</u>
La première tâche des élèves est la détermination du lieu des sommets C des glénatris. La professeure ne laisse pas une seconde aux élèves pour déterminer seuls ce lieu, nous pouvons donc supposer qu'elle craint que la tâche ne soit trop difficile ou qu'elle ne souhaite pas leur laisser le temps nécessaire à cette détermination. Pour les aider à trouver rapidement que le lieu est le cercle de diamètre [AB], on peut penser à le faire visualiser à l'aide de plusieurs cas particuliers. Paradoxalement, la professeure propose de construire un

cas particulier, le même pour toute la classe puisque $x = 2$ est fixé. Paradoxalement car la méthode à la règle graduée et au compas de construction du point C repose sur l'utilisation du lieu cherché. Nous ne supposerons par que la professeure n'a pas remarqué la contradiction, nous pensons, au contraire, qu'elle « canalise » les élèves vers cette propriété pour gagner du temps.
Cet accompagnement de la tâche proposée apparaît comme un compromis entre le choix de laisser la responsabilité de la recherche aux élèves et celui de ne pas passer trop de temps dans la réalisation de cette tâche. Les risques ne sont pas nuls pour autant car les élèves pourraient mobiliser d'autres méthodes pour tracer les triangles : tracé approximatif à l'équerre, calcul du troisième côté... Ces méthodes « parasites » sont invalidées : la professeure exige une construction précise et interdit le calcul.
Néanmoins, ces méthodes sont proposées par des élèves interrogés. Conformément à son exigence préventive, la professeure les refuse, et interroge d'autres volontaires après avoir rappelé les consignes complémentaires de la tâche c'est-à-dire, plus précisément, le contrat.
Les mesures préventives n'ont pas été totalement suffisantes : un élève propose de commencer par tracer le segment [AC]. Dans la mesure où l'élève doit potentiellement tracer plusieurs triangles, cette réponse est inadaptée par manque de généralité mais la compréhension de l'inadaptation est hors de portée de l'élève dont la tâche a été réduite à un cas particulier. La professeure gère l'incident en occultant la difficulté : elle félicite l'élève, valide sa réponse, mais la rejette comme solution pour la classe en rappelant qu'à l'origine de la tâche, le côté [AB] était déjà tracé.
Assez vite, finalement, des élèves proposent le cercle de diamètre [AB] et la professeure récupère la trajectoire prévue du déroulement.

<u>Des adaptations pour tenir compte des difficultés des élèves</u>
La première question de la fiche n'aborde pas complètement le problème du lieu des sommets des glénatris : on demande seulement de montrer que les sommets appartiennent au cercle de diamètre [AB], mais pas quels sont les points de cette figure qui sont aussi sommets d'un glénatri. Ce choix montre que la professeure a conscience de la difficulté que rencontreraient les élèves s'ils devaient résoudre un problème de lieu. En proposant cette tâche, elle demande l'utilisation de la propriété du cercle circonscrit au triangle rectangle, mais pas de sa réciproque. La tâche proposée n'est pas sans difficulté car la professeure attend d'une classe de seconde qu'elle distingue une propriété de sa réciproque.
Après une recherche individuelle, la professeure interroge ses élèves.
Le premier à répondre à la question n'en a pas saisi la teneur : il s'intéresse à la figure variable de la construction des glénatris (le cercle de centre A et de rayon x), la professeure ignore cette réponse puis relance l'activité des élèves en induisant la réponse attendue : elle demande un endroit, une figure, où sont situés tous les sommets des glénatris, invitant ainsi les élèves à répondre par une droite ou par un cercle.
La professeure obtient alors rapidement la réponse attendue mais elle ne s'en contente pas, elle demande une justification, justification qui pose la difficulté de savoir distinguer la propriété utilisée de sa réciproque. La première réponse obtenue est fausse. La professeure change d'intervenant et facilite la tâche par le rappel des hypothèses. Le deuxième élève interrogé commet la même erreur. La professeure, cette fois, pose explicitement la question du sens (direct ou réciproque) de la propriété à utiliser. Elle obtient alors la propriété attendue, mais pas une formulation correcte de la démonstration. Devant les difficultés rencontrées par les élèves, la professeure décide alors de répondre à la place de la classe.
Ce qui émerge ici de l'analyse des pratiques est l'évolution de l'adaptation de l'enseignante aux difficultés anticipées ou rencontrées des élèves. Les choix effectués *a priori* et *a posteriori* montrent d'une part que l'enseignante ne veut pas poser de problème trop difficile que les élèves ne pourraient pas résoudre au moins en partie, et d'autre part qu'elle ne souhaite pas non plus négocier trop à la baisse le niveau du travail demandé. Les accompagnements de la tâche proposée durant le déroulement visent à la rendre accessible aux élèves, mais l'enseignante devra renoncer à ce qu'ils construisent la démonstration. Elle laissera simplement le mot de la fin à un élève pour marquer un « succès d'étape » qui

donne à la classe un sentiment de réussite, sentiment nécessaire pour la bonne avancée du déroulement.

Rester maître du temps pour préserver le scénario prévu

La première question de la deuxième partie demande l'expression de *y* (le deuxième côté de l'angle droit) en fonction de *x* (le premier côté). Les élèves utilisent le théorème de Pythagore et écrivent bien $y = \sqrt{36 - x^2}$ mais après, certains écrivent $y = 6 - x$.

La professeure décide de ne pas ignorer l'incident, dans l'intérêt des élèves. Elle expose l'erreur commise en l'inscrivant au tableau, elle signale que l'erreur provient de l'application d'une formule qui n'existe pas et propose un contre-exemple pour justifier son inexistence.

Cependant, la professeure choisit de ne pas traiter l'erreur commise. Après avoir proposé un contre-exemple, elle renvoie son étude au travail personnel des élèves.

Cette erreur classique a déjà été traitée en « Aide Individualisée », la professeure sait qu'une explication supplémentaire ne suffira pas à régler le problème ; en outre certains élèves ne commettent plus cette faute et l'enseignante craint sans doute l'agitation de ces élèves. Aussi décide-t-elle de ne pas traiter complètement la question afin de pouvoir continuer la résolution du problème posé. Il y a en quelque sorte conflit d'intérêt entre trois partenaires : deux groupes d'élèves (ceux qui font la faute et qui auraient besoin de travailler encore la question, et ceux qui ne la font plus) et la professeure qui veut avancer la résolution du problème telle qu'elle a été prévue dans le scénario.

Le choix de différer le traitement de l'erreur s'est fait sur une connaissance qui n'est pas liée aux fonctions, qui n'est donc pas indispensable pour la suite de la séance. L'analyse montre finalement que la gestion du temps de l'enseignement permet à la professeure de respecter globalement l'itinéraire prévu.

Un changement d'itinéraire pour ne pas « avancer » sans la classe

Une fois la fonction définie par l'expression $y = \sqrt{36 - x^2}$, il reste à déterminer son ensemble de définition. Cela se justifie, du point de vue du professeur, car le programme demande d'identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule. L'enseignante préfère aborder cette question géométriquement. Cela se justifie, du point de vue de l'élève, par l'analyse mathématique de la tâche : *x* est le côté d'un triangle rectangle donc *x* est positif et inférieur à la mesure de l'hypoténuse, 6.

Un succès d'étape est marqué rapidement en faisant écarter les valeurs de *x* négatives par un élève. En revanche, la professeure préfère prendre partiellement en charge l'explication de la majoration par 6 qui lui paraît plus difficile à déterminer géométriquement. À la question « est-ce que toutes les valeurs positives de *x* conviennent ? » un élève répond qu'il ne faut pas que le point C sorte du cercle. Cette réponse incomplète est reprise par la professeure pour expliquer la majoration par 6. Cependant la preuve géométrique n'est pas apportée car l'argument n'est pas trouvé : l'enseignante fait varier le point C sur le cercle jusqu'à la position limite constituée par le point B mais la relation entre position limite et valeur maximale est confuse, d'autant plus que sur le dessin approximatif effectué au tableau, certaines cordes sont plus longues que le diamètre. La professeure gênée laisse entendre qu'il n'y a pas d'argument géométrique parce qu'elle ne le trouve pas et propose de d'effectuer la preuve de la majoration dans le cadre numérique où elle ne doute pas de ses capacités à déterminer l'ensemble de définition.

Pour faire admettre le changement de cadre, du cadre géométrique vers le cadre numérique, l'enseignante pose la question : « est-ce que ça c'est une démonstration ? » Les élèves répondent par la négative, ils rendent explicite le fait que l'explication précédente ne constitue pas une démonstration, et par conséquent la nécessité d'une autre démarche. Au tableau, l'enseignante délaisse la figure géométrique et désigne l'expression de f(x), elle renouvelle la question de l'ensemble de définition de la fonction de manière adaptée au nouveau cadre : « quelle vont être les valeurs interdites pour *x* ? » Suit alors un échange

entre la professeure et ses élèves, l'inéquation 36 – $x^2 \geq 0$ pour des valeurs positives de x conduit à l'intervalle de définition [0 ; 6].
Les bornes de l'intervalle posent problème dans le cadre géométrique car le triangle rectangle n'est pas défini pour $x = 0$ et pour $x = 6$. Elles n'en posent pas dans le cadre numérique puisque y est calculable pour ces deux valeurs. C'est pourtant dans le cadre géométrique que la professeure demande de ne pas exclure les bornes. Nous interprétons cela comme le refus de rester dans le cadre numérique, comme la volonté de retrouver au plus vite l'itinéraire prévu où les problèmes sont résolus dans le cadre géométrique.
L'analyse montre comment la difficulté mathématique rencontrée par l'enseignante a modifié l'accompagnement de la tâche. La première partie est confiée aux élèves mais pas la seconde parce que la professeure qui manque encore d'expérience professionnelle doute de sa possibilité de gérer efficacement les interventions des élèves. Il s'ensuit un changement d'itinéraire par rapport au scénario prévu (passage du cadre géométrique au cadre numérique), un changement d'itinéraire consenti pour que les élèves puissent comprendre la résolution, pour que le professeur puisse « avancer » dans le déroulement sans se « séparer » de ses élèves.

<u>Des contraintes de temps qui pèsent sur l'enseignement</u>
L'épisode que nous nous proposons d'analyser maintenant correspond à la résolution de la deuxième question de la troisième partie : la représentation graphique de la fonction qui associe l'aire z du glénatri à chaque valeur de x est fournie aux élèves, il s'agit de déterminer l'aire maximale et de prouver le résultat obtenu dans le cadre géométrique.
La professeure laisse les élèves chercher le maximum de la fonction, puis elle interroge un élève qui n'a pas réussi et qui reste silencieux. L'enseignante gère cet incident en guidant l'élève, cela lui permet de montrer à toute la classe la technique de lecture graphique. Elle enrichit les brèves réponses de l'élève interrogé en explicitant le lien entre le cadre graphique et le cadre géométrique : elle interprète les axes, la courbe, les points et même les coordonnées des points. Ce faisant, elle prépare aussi la réponse à la dernière question de la séance : résoudre une équation du type $f(x)=k$.
En exposant la technique de lecture graphique, la professeure rencontre, et partage avec la classe, les problèmes liés à l'imprécision du tracé et les approximations inévitables dans une activité de ce type. Ces approximations sont génératrices de questions plus théoriques : comment étudier une fonction pour déterminer la valeur exacte d'un maximum et l'abscisse du point de la courbe ayant ce maximum pour ordonnée ? Traiter ces questions éloignerait la classe de l'itinéraire prévu qui prévoit la détermination du maximum dans le cadre géométrique. Cependant, la résolution géométrique n'apporte rien à l'introduction aux fonctions. La professeure choisit de valider les valeurs lues sur le graphique sans aborder vraiment la question théorique sur laquelle elle s'attarde pourtant un peu. Mais la fin de la séance approche et il faut répondre à la dernière question.
L'analyse de cet épisode montre comment la contrainte du temps pèse sur l'enseignement : la professeure prend en charge la réalisation d'une tâche qu'elle avait pourtant prévu de laisser aux élèves puis elle renonce à un développement qui aurait enrichi l'introduction à la notion de fonction.

IV. 3. 4. Bilan de l'analyse

L'analyse des pratiques de la professeure tout au long de l'année montre une volonté d'aménager un espace de travail mathématique effectif aux élèves durant les séances en classe. Cette volonté apparaît clairement dans la préparation et le déroulement de la séance filmée. En effet, l'analyse du fonctionnement prévu par cette stagiaire montre son souci de laisser une place au travail personnel des élèves en alternant des phases de recherche et des moments de mise en commun des résultats obtenus. L'étude du déroulement effectif met en évidence que les élèves ont effectivement disposé de temps de recherche importants au cours de cette séance, surtout lors des deux premières parties. Dans la troisième, ils sont plus courts, ceci s'expliquant certainement par un manque de temps.

Par ailleurs, l'analyse précédente de quelques épisodes du déroulement en classe montre la volonté de l'enseignante de prendre en compte les élèves, de les faire participer, de leur laisser une certaine place lors des différents moments de la résolution du problème (phase de recherche individuelle, phase d'explicitation de démarches ou de formulation de réponses, phase de justification). Mais il s'avère aussi que, dès que les élèves sollicités sont en difficulté, notamment lors des moments de justification ou de formulation, elle a tendance à reprendre rapidement la main et à prendre ces tâches sous sa responsabilité, tout en usant de stratégies qui permettent d'associer les élèves, au moins en surface. Certes, la contrainte du temps ne permet pas de relancer sans cesse le débat dans la classe et l'enseignant doit faire en sorte que son projet avance. Les stratégies de cette stagiaire contribuent à cette avancée, mais leur mise en place contribue souvent à faciliter grandement la tâche des élèves.
Cette tendance à faciliter leur tâche apparaît plus particulièrement lors de l'étude des questions géométriques du préliminaire (cf. l'analyse des deux premiers épisodes dans IV.3.3) et lors du traitement de tâches nouvelles spécifiques au travail sur les fonctions (cf. le cinquième épisode analysé dans IV.3.3 relatif à la lecture graphique de la valeur d'un maximum). En ce qui concerne le préliminaire, l'étude du champ mathématique a montré que les savoirs en jeu ne sont pas relatifs à l'objectif visé par l'activité. Le fait de faciliter la tâche permet à l'enseignante d'avancer dans son projet même si certains savoirs géométriques anciens ne sont pas mobilisables par tous les élèves de la classe. Relativement aux questions plus spécifiques aux fonctions, il s'avère que cette stagiaire ne s'est pas encore construit d'outils pour prendre en charge d'éventuelles difficultés de ces élèves face à ces nouvelles tâches mathématiques. En effet, dans son travail de préparation soigné, on la voit prévoir très précisément des difficultés de type algébrique qu'elle a déjà rencontrées et pour lesquelles elle s'est construit des moyens d'anticipation et des gestes de prise en charge. En revanche, il apparaît que, même si elle est consciente que certaines questions plus spécifiques aux fonctions peuvent être problématiques pour les élèves, elle ne dispose pas encore de connaissances équivalentes pour anticiper des difficultés particulières liées à ce travail (notion de variable, dépendance fonctionnelle, construction d'une courbe représentative) et pour les prendre en charge. En prenant certaines précautions au cours de la séance, elle essaie visiblement de limiter la complexité des questions posées.

V. CONCLUSION

Nous nous sommes interrogés dans cet article sur les potentialités et limites de différents cadres théoriques pour analyser l'activité mathématique de l'élève et ce qui la façonne au sein de la classe. Nous l'avons fait à partir de deux situations sensiblement différentes. Elles le sont d'abord quant à leurs enjeux : dans le premier cas, ce qui est visé c'est une technique, celle du tableau de signe, dont la pertinence mathématique et le champ d'action, comme le montre l'étude anthropologique menée par l'IREM de Poitiers, sont relativement limités, et ne justifient pas à eux seuls l'importance qu'elle a dans l'enseignement ; dans le second cas, c'est l'entrée dans le monde fonctionnel, un enjeu essentiel de la scolarité du lycée. Elles le sont aussi par le contexte de leur conception : la première a été élaborée avec l'aide d'un chercheur dans le cadre d'un travail d'ingénierie didactique, en s'appuyant sur un cadre théorique précis ; la seconde a été conçue par une jeune professeure stagiaire, quasiment sans aide. Elles le sont par leurs acteurs enseignants : enseignantes chevronnées d'une part, enseignante débutante dans l'autre. Ces contrastes étaient voulus.

Que ressort-il de cette étude ? Tout d'abord, nous semble-t-il, le potentiel pour l'analyse que nous offre la palette des outils didactiques dont nous disposons aujourd'hui, qu'il s'agisse d'analyser des situations de recherche ou des situations ordinaires. Ensuite, sans aucun doute, le renforcement de la conviction que nous avions au départ que la réalité complexe que nous étudions ne saurait s'épuiser dans un seul des regards théoriques aujourd'hui disponibles : chacun projette l'analyse dans certains espaces, cela nous ouvre certaines rationalités tout en nous en masquant d'autres. Mais aussi, phénomène tout à fait intéressant, que l'on peut faire jouer assez facilement les complémentarités entre les différentes approches que nous avons ici mobilisées. Il y a sans doute sous-jacente à toutes ces constructions, des expériences, une culture partagée qui le rendent possible.

Nous avons, au début de cet article, souligné que cette question d'articulation des approches théoriques nous concernait tous car elle était intimement liée à celle de l'action didactique. Et c'est sur ce point que nous voudrions insister pour terminer car à ce niveau aussi il y a des leçons à tirer du travail mené. Les choix effectués pour élaborer un scénario d'enseignement conditionnent l'activité des élèves mais pas complètement : en classe, les indications, les aides, les échanges divers influencent également la nature de cette activité. Il apparaît que les reconstructions globales qu'on peut envisager touchent davantage le scénario prévu que son déroulement en classe alors que des reconstructions locales peuvent porter sur les deux à la fois. Les recherches actuelles montrent en outre que tous les scénarios ne peuvent pas être adoptés par tous les enseignants donc dans le cadre d'une formation initiale ou continue, des équilibres sont à trouver entre des recompositions globales, pas toujours possibles, ou locales, pas toujours suffisantes, si l'on veut promouvoir une activité mathématique de plus grande qualité chez les élèves.

Références :

Artigue M., Lagrange J.B. (1999). Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de première S, in D.Guin (ed) *Actes du premier colloque européen Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques,* La Grande Motte, mai 1998, IREM de Montpellier. *mathématiques*, pp. 380-382.

Artigue M., Douady R., Haspekian M. (2001). *L'analyse didactique de deux vidéos réalisées en classe de seconde*. Recherche ADIREM – INRP. Rapport intermédiaire. IREM Paris 7.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 77-111.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19/2, 221-265.

Defouad B. (2000). *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Dorier J.L. et al. (eds) (2002). *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-32.

Guin D. & Trouche L. (eds). (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Lenfant A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Margolinas C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. In R. Noirfalise (Ed.), *Actes de l'Université d'Eté « Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques »,* 3-16. IREM de Clermont-Ferrand.

Margolinas C. & Perrin-Glorian M.J. (Eds). (1997). Recherches sur la modélisation de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17/3.

Noirfalise R. (ed). (1998). *Actes de l'Université d'Eté « Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques ».* IREM de Clermont-Ferrand.

Perrin-Glorian M.J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de miieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19.3.

Perrin M.J. & Robert A. (eds). (2001). Actes du colloque en l'honneur de Régine Douady. IREM Paris 7.
Rabardel P. L'homme et les outils contemporains. Paris : A. Colin.
Robert A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21/1-2, 57-80.
Robert A. & Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies,* vol 2 .4.
Roditi E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude des pratiques ordinaires.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Glossaire

Dialectique outil-objet : cette expression renvoie à la distinction faite entre deux dimensions des concepts mathématiques : leur dimension d'outil intervenant dans la résolution de problèmes, leur dimension d'objet appartenant à un édifice structuré et socialement reconnu. Partant du fait que les concepts mathématiques apparaissent généralement dans leur dimension d'outil avant de se constituer en objet, R. Douady a développé une approche didactique connue sous le nom de dialectique outil-objet visant à refléter cette caractéristique dans l'organisation des apprentissages. La dialectique outil-objet comporte cinq phases qui structurent à partir de connaissances anciennes, le développement de nouveaux concepts, d'abord sous forme d'outils, implicites puis explicites, ensuite leur reconnaissance comme objets via des processus d'institutionnalisation, le travail sur ces objets et leur réinvestissement comme outils dans des situations plus complexes. R. Douady dans (Douady, 1986) les dénomme ainsi : « Ancien », « Recherche nouveau implicite », « Explicitation et institutionnalisation locale », « Institutionnalisation - statut d'objet », « Familiarisation – réinvestissement ». Le lecteur sera peut-être tenté d'établir un parallèle avec les différents moments de l'étude introduits dans la théorie anthropologique. Précisons que, contrairement aux phases de la dialectique outil-objet, les moments de l'étude ne se situent pas dans une organisation temporelle précise.

Cadres et changements de cadres : R. Douady, qui a introduit cette notion de cadre en didactique, définit un cadre comme un ensemble « d'objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et relations ». Les changements de cadres jouent un rôle important dans la mise en œuvre de la dialectique outil-objet dans la mesure où l'interprétation d'un problème posé dans un cadre donné dans un autre cadre judicieusement choisi ouvre souvent des moyens d'action et d'avancée dans la résolution du problème inaccessibles dans le cadre initial. Les changements de cadre apparaissent ainsi comme des leviers privilégiés pour provoquer la construction de connaissances nouvelles dans leur dimension d'outil implicite puis explicite. C'est pourquoi cette approche didactique attache une importance particulière dans l'élaboration des situations d'apprentissage aux cadres susceptibles d'intervenir dans la résolution des problèmes proposés aux élèves (si possible, plusieurs doivent pouvoir intervenir) et à la façon dont le travail dans les différents cadres va pouvoir s'articuler, sous la conduite de l'enseignant.

Registre : ce terme est utilisé ici avec le sens de registre de représentation sémiotique, avec l'acception que lui donne R. Duval (Duval, 1995). Un registre de représentation sémiotique doit permettre les trois opérations fondamentales suivantes : la formation de représentations dans le registre, leur traitement à l'intérieur du registre, la conversion vers un autre registre de représentation. Ainsi par exemple, il distingue classiquement quand il est question d'algèbre et de fonctions : le registre de la langue naturelle, le registre des expressions symboliques algébriques, le registre des représentations graphiques. Précisons que plusieurs cadres peuvent utiliser le même registre et que le travail dans un cadre mobilise généralement plusieurs registres.

Situation a-didactique : Cette expression est utilisée dans la théorie des situations didactiques pour désigner une situation où, momentanément du moins, les élèves agissent en « sujets mathématiques », en oubliant que cette situation a été construite par l'enseignant avec une intention didactique précise, dans le cadre d'un contrat didactique déterminé. Dans la théorie des situations didactiques, les situations a-didactiques jouent un rôle fondamental et une des ambitions du chercheur est de construire des situations a-didactiques permettant de faire apparaître les connaissances visées par l'apprentissage comme des solutions optimales aux problèmes posés. En fait, une situation d'enseignement réelle ne fonctionne que très rarement comme une situation a-didactique, mais ceci n'interdit pas d'essayer d'en construire un modèle a-didactique pour étudier en particulier le potentialités d'apprentissage qu'elle pourrait offrir dans un fonctionnement où l'enseignant n'interviendrait pas pour apporter des connaissances ou faire référence au contrat didactique. Cette modélisation aide à analyser ensuite la situation effective et à mieux percevoir le rôle qu'ont pu jouer dans son déroulement des phénomènes de contrat didactique. Elle peut aussi aider à envisager des modifications permettant d'en renforcer les potentialités a-didactiques. Un des principes fondateurs de la théorie des situations didactiques est qu'un certain niveau d'a-didacticité est nécessaire à l'apprentissage des mathématiques.

Dévolution : Dans la théorie des situations didactiques, la dévolution désigne le processus par lequel l'enseignant donne aux élèves la responsabilité du travail mathématique et entretient cette responsabilité, dans le but de se rapprocher le plus possible d'un fonctionnement a-didactique.

Institutionnalisation : Dans la théorie des situations didactiques, la notion de d'institutionnalisation désigne l'ensemble des processus locaux ou plus globaux par lesquels les connaissances construites au sein de la classe, individuellement et collectivement, sont reliées par l'enseignants aux savoirs institutionnellement reconnus visés par l'enseignement.

Contrat didactique : Dans la théorie des situations didactique, la notion de contrat didactique désigne l'ensemble des attentes mutuelles de l'enseignant et des élèves par rapport au savoir mathématique. Ce contrat didactique, largement implicite, s'inscrit dans un ou des contrats pédagogiques plus globaux ; il évolue au fil de l'avancée des connaissances et devient particulièrement perceptible dans les situations de rupture.

Instrumentation, instrumentalisation : L'approche instrumentale, s'inspirant de travaux menés en ergonomie cognitive (cf. Rabardel, 1996), distingue entre l'objet ou artefact et l'instrument que cet objet devient au service de l'activité mathématique d'un individu donné ou d'une institution. La transition artefact-instrument se produit via une genèse instrumentale, en général complexe. Cette genèse met en jeu des processus d'instrumentalisation dirigés vers l'artefact et des processus d'instrumentation dirigés vers le sujet. Ces processus d'instrumentation se traduisent par le développement de schèmes d'action instrumentée qui sont à la base de techniques instrumentées servant à la résolution de tâches mathématiques. L'approche instrumentale qui s'est développée initialement dans le contexte de logiciels de calcul formel et de calculatrices symboliques en didactique des mathématiques, apporte une attention particulière à l'analyse des connaissances mathématiques et techniques qui interviennent dans la genèse instrumentale ainsi qu'à leur imbrication. Elle est aussi particulièrement sensible aux problèmes d'articulation entre techniques instrumentées et techniques papier/crayon, ainsi qu'aux problèmes posés par cette articulation et plus généralement par la gestion institutionnelle des genèses instrumentales. Une hypothèse faite est qu'actuellement ces problèmes d'articulation et de gestion sont fortement sous-estimés par la noosphère.

La double approche ergonomique et didactique des pratiques enseignantes : Ce cadre, développé par A. Robert et J. Rogalski, s'appuie sur des travaux issus de psychologie ergonomique et de didactique des mathématiques ; son objectif est de contribuer à l'analyse et à la compréhension des pratiques des enseignants tant du point de vue de ce qu'elles peuvent engendrer en terme d'apprentissages des élèves que du point de vue des impératifs professionnels auxquels elles répondent, par rapport à l'enseignant lui-même, et pas seulement par rapport à ses élèves. Les séances en classe sont d'une part analysées selon trois dimensions : la première est liée aux contenus travaillés en classe et à la répartition des activités prévue entre l'enseignant et les élèves, la deuxième est relative aux formes de travail des élèves pendant les séances, et la troisième concerne les échanges avec l'enseignant. Ces analyses conduisent à une lecture des pratiques de l'enseignant selon deux composantes : la composante « cognitive » qui résulte de l'analyse de ce qui est planifié par le professeur pour agir sur les connaissances mathématiques des élèves et la composante « médiative » qui renseigne sur l'organisation par l'enseignant dans sa classe des médiations entre lui et les élèves ou entre les élèves. D'autre part, afin de saisir les régularités dans les pratiques d'un même professeur ou entre professeurs et de préciser les marges de manœuvre réellement investies par les enseignants, deux autres composantes sont considérées : la composante « sociale » relative aux contraintes institutionnelles et sociales qui pèsent sur les pratiques enseignantes et la composante « personnelle » liée aux conceptions du professeur quant au savoir et au métier, sa tolérance en matière de risque, son besoin de confort… Les différentes analyses sont croisées pour reconstruire ce qui apparaît en classe du système complexe et cohérent des pratiques des professeurs étudiés, en le reliant aux contraintes et décisions en jeu.